代数学 III レポート問題２　**12/10 修正**（問題 2.4 を修正しました）　12/25 の授業開始時に集めます.

問題 1 $K = \mathbf{Q}(\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}) \subset \mathbf{R}$ とし，L を K の $\mathbf{Q}$ 上のガロワ閉包とする.

1. 拡大次数 $[K:\mathbf{Q}]$ を求めよ.　（$[\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbf{Q}] = 4$ は既知としてよい.）
2. $\alpha = \sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ の $\mathbf{Q}$ 上の最小多項式 $P \in \mathbf{Q}[X]$ を求めよ.
3. 拡大次数 $[L:\mathbf{Q}]$ を求めよ.
4. ガロワ群 $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ を，可換群の半直積として表せ.
5. 中間体 M で，L が M の巡回 4 次拡大であるものを求めよ.
6. 中間体 M で，L が M の 8 次アーベル拡大であるものをすべて求め，ガロワ群 $\mathrm{Gal}(L/M)$ を巡回群の直積として表せ.

問題 2 $L = \mathbf{C}(X,Y,Z)$ を複素数体上の 3 変数有理関数体とする.

$$S = X+Y+Z,\ T = XY+YZ+ZX,\ U = XYZ \in L$$

を基本対称式とし，$K = \mathbf{C}(S,T,U) \subset L$ とおく．$\omega \in \mathbf{C}$ を 1 の原始 3 乗根とする.

1. ガロワ群 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ を求めよ.
2. $A = XY^2+YZ^2+ZX^2$ とおき，$M = K(A) \subset L$ とする．M は K の巡回 2 次拡大であり，L は M の巡回 3 次拡大であることを示せ.
3. $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/K)$ を生成元とし，$D = A - \sigma A$ とおく．$D^2 \in K$ を示せ．$M = K(D)$ も示せ.
4. $C = X + \omega^2 Y + \omega Z$ とおく．$C^3 \in M$ を示せ．$L = M(C)$ も示せ.

問題 3 $L = \mathbf{Q}(X,Y,Z,W)$ を有理数体上の 4 変数有理関数体とする.

$$S = X+Y+Z+W,\ T = XY+YZ+ZX+XW+YW+ZW,$$

$$U = XYZ+YZW+ZWX+WXY,\ V = XYZW \in L$$

を基本対称式とし，$K = \mathbf{Q}(S,T,U,V) \subset L$ とおく.

1. ガロワ群 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ を求めよ.
2. $A = XY+ZW,\ B = XZ+YW,\ C = XW+YZ$ とおき，$M = K(A,B,C) \subset L$ とする．M に対応する G の部分群 N を求めよ．N は正規部分群であることを示し，ガロワ群 $\mathrm{Gal}(M/K)$ も求めよ.
3. $D = XY - ZW,\ E = XZ - YW$ とおく．$D^2, E^2 \in M$ を示せ．$L = M(D,E)$ も示せ.
4. （修正）拡大次数 $[K(A):K]$ を求めよ．$K(A)$ の 2 次拡大 M で L が M の 4 次巡回拡大になるものをもとめ，$M = K(F)$ をみたす多項式 $F \in \mathbf{Q}[X,Y,Z,W] \subset \mathbf{Q}(X,Y,Z,W)$ を 1 つ与えよ.