

代数学 III レポート問題 11/6 の授業開始時に集めます。

問題 1 \mathbf{Q} を有理数体とし, K を実数体 \mathbf{R} の部分体 $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ とする.

1. 拡大次数 $[K : \mathbf{Q}]$ を求めよ.
2. 体の自己同形群 $\text{Aut}(K)$ を求め, K は \mathbf{Q} のガロワ拡大であることを示せ.
3. K の部分体をすべて求めよ.
4. $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ であることを示せ.
5. $\text{Gal}(K/\mathbf{Q})$ の元 σ による $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ の像をすべて求めよ. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ の \mathbf{Q} 上のトレース, ノルムと最小多項式を求めよ.

問題 2 $L = \mathbf{C}(T)$ を複素数体上の 1 変数有理関数体とし, $\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ を 1 の原始 3 乗根とする. L の \mathbf{C} 上の自己同形 σ, τ を $\sigma(T) = \omega T$, $\tau(T) = \frac{1}{T}$ で定める.

$S = T^3 + \frac{1}{T^3}$ とおき, L の部分体を $K = \mathbf{C}(S)$ で定める.

1. 部分群 $G = \langle \sigma, \tau \rangle \subset \text{Aut}_{\mathbf{C}}(L)$ の位数を求めよ.
2. T の K 上の最小多項式と拡大次数 $[L : K]$ を求めよ.
3. S は \mathbf{C} 上超越的であることを示せ.
4. L は K のガロワ拡大であることを示せ.
5. K と L の中間体 M をすべて求め, M の元 A を使って $M = \mathbf{C}(A)$ のように表せ.
6. 5. で求めた M のうち K のガロワ拡大となるものをすべて求め, そのときのガロワ群 $\text{Gal}(M/K)$ もそれぞれ求めよ.
7. 中間体 M, M' を K のガロワ拡大でないものとする, $\rho(M) = M'$ となる $\rho \in \text{Gal}(L/K)$ があることを示せ.
8. $\text{Gal}(L/K)$ の元 ρ による T の像をすべて求めよ. T の K 上のトレースとノルムも求めよ.