2006 年度夏学期 数理科学 I 期末試験問題

2 年 理科 I 類 4-6・15・26・30 組　7 月 21 日（金）1 限 9:00-10:30(90 分)　斎藤 毅

・問題用紙　1 枚、解答用紙　両面 2 枚、計算用紙 1 枚

・計時機能のみの時計と筆記用具以外もちこめません。

・答案用紙は，仮に白紙でも，**2 枚とも**名前を書いて提出して下さい.

最後の答だけを書くのではなく, 途中の計算なども**できるだけくわしく**書いて下さい.

問題 **1.** 方程式 $3x^2y - y^3 = 8$ で定まる曲線のうち、第一象限にある部分を C とする.

（1）C 上の点 $(\sqrt{6}, 4)$ での、C の法ベクトルと接線の方程式を求めよ.

（2）C 上の点で、その点での C の接線が y 軸と平行となる点の座標を求めよ.

（3）C の概形を図示せよ.

（4）Lagrange 未定係数法（講義で説明した，偏微分を使って条件つき極値問題をとく方法のこと）を **必ず使って**，C 上での関数 $x^2 + y^2$ の最小値を求めよ．最小値をとる点の座標も求めよ.

問題 **2.** O を xy 平面の原点，P を点 $(2, 0)$，Q を点 $(2\sqrt{2}, 2)$ とする．曲線 C_1 を，双曲線 $x^2 - y^2 = 4$ のうち，P と Q の間の部分とする．S を，曲線 C_1 と線分 OP，OQ で囲まれた xy 平面の部分とする．C を，曲線 C_1 と線分 OP，OQ をあわせた閉曲線とし，C のむきを，S が C の進行方向左側にあるように定める.

（1）$t = \log \dfrac{x+y}{2}$ をパラメータとして，曲線 C_1 のパラメータ表示を与えよ.

（2）点 $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$ での曲線 C_1 の曲率の絶対値を求めよ.

（3）線積分

$$\int_C -y^3dx + x^3dy$$

を求めよ.

（4）Green の公式を使って,（3）の線積分を S 上の重積分として表わせ.

（5）変数変換 $(s, t) = (x^2 - y^2, 2xy)$ による，S の st 平面での像を D とする．D の面積を求めよ.

（6）重積分の変数変換公式を使って，D の面積を S 上の重積分として表わせ.

問題 **3.** （1）C を，原点を中心とする半径 1 の円のうち，第 1 象限に含まれる部分とする．$(1, 0)$ を C の始点，$(0, 1)$ を終点として，次の線積分を求めよ

$$\int_C x^7y^6dy.$$

（2）D を，不等式 $8 \leq 4y \leq x^2 \leq 9, x \geq 0$ で定まる xy 平面の部分とする．変数変換 $x = s + t, y = st$ を **必ず使って**，次の重積分を求めよ

$$\int_D \sqrt{x^2 - 4y}\, dxdy.$$

略解. **1.** （1）$f(x,y)=3x^2y-y^3$ とおく．$f_x(x,y)=6xy, f_y(x,y)=3(x^2-y^2)$ だから，法ベクトルは $\begin{pmatrix} f_x(\sqrt{6},4) \\ f_y(\sqrt{6},4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24\sqrt{6} \\ -30 \end{pmatrix}$．接線の方程式は $4\sqrt{6}(x-\sqrt{6})-5(y-4)=0$，つまり $4\sqrt{6}x-5y=4$．

（2）接線が y 軸と平行となる条件は $f_y(x,y)=3(x^2-y^2)=0$ だから，$3x^2y-y^3=8$ に $y=x$ を代入して，$(x,y)=(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{4})$ が解．

（3）省略

（4）$h(x,y)=x^2+y^2$ とおくと，$h_x(x,y)=2x, h_y(x,y)=2y$．Lagrange 未定係数法より，条件 $f(x,y)=3x^2y-y^3=8$ のもとでの関数 $h(x,y)=x^2+y^2$ の最小値をとる点の座標は，$f_x(x,y):f_y(x,y)=h_x(x,y):h_y(x,y)$ をみたす．よって，$6xy:3(x^2-y^2)=2x:2y$ だから，$2xy^2=x(x^2-y^2)$．したがって，$x=\sqrt{3}y$ だから，$(x,y)=(\sqrt{3},1)$．最小値は 4.

2. （1）$t=\log\dfrac{x+y}{2}$ とすると，$x+y=2e^t$．$x-y=\dfrac{4}{x+y}=2e^{-t}$ だから，$x=e^t+e^{-t}, y=e^t-e^{-t}$．$t$ の範囲は $0\leq t\leq \log(\sqrt{2}+1)$.

（2）曲率の 2 乗が

$$\frac{(x''y'-x'y'')^2}{(x''^2+y''^2)^3}=\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^3}=\frac{16}{(x^2+y^2)^3}$$

だから，$(x,y)=(\sqrt{6},\sqrt{2})$ のとき，曲率の絶対値は $\sqrt{\dfrac{16}{8^3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

（3）線分 OP のパラメータ表示を $x=t, y=0\ (0\leq t\leq 2)$ とすると，

$$\int_{OP} -y^3dx+x^3dy=\int_0^2 0dt=0.$$

線分 OQ のパラメータ表示を $x=\sqrt{2}t, y=t\ (0\leq t\leq 2)$ とすると，

$$\int_{OQ} -y^3dx+x^3dy=\int_0^2 -\sqrt{2}t^3+2\sqrt{2}t^3dt=\sqrt{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2=4\sqrt{2}.$$

曲線 C_1 のパラメータ表示を（1）のようにとり，$a=\log(\sqrt{2}+1)$ とおく．$\dfrac{dx}{dt}=y$, $\dfrac{dy}{dt}=x$ だから，

$$\begin{aligned}\int_{C_3} -y^3dx+x^3dy &= \int_0^a -y^4+x^4dt=4\int_0^a x^2+y^2dt=8\int_0^a e^{2t}+e^{-2t}dt \\ &= 4[e^{2t}-e^{-2t}]_0^a=4(e^{2a}-e^{-2a})=4(e^a+e^{-a})(e^a-e^{-a})=4\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2=16\sqrt{2}.\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_C -y^3dx+x^3dy &= \int_{OP} -y^3dx+x^3dy+\int_{C_1} -y^3dx+x^3dy-\int_{OQ} -y^3dx+x^3dy \\ &= 16\sqrt{2}-4\sqrt{2}=12\sqrt{2}.\end{aligned}$$

（4）Green の公式より，

$$\int_C -y^3dx + x^3dy = \int_S \left(\frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial x^3}{\partial x}\right) dxdy = 3\int_S x^2 + y^2 dxdy.$$

（5）変数変換 $(s,t) = (x^2 - y^2, 2xy)$ により，O は原点 O に，P は $P' = (4,0)$ に，Q は $Q' = (4, 8\sqrt{2})$ に移される．線分 OP, OQ と曲線 C_1 はそれぞれ線分 $OP', OQ', P'Q'$ に移され，したがって，像 D は三角形 $OP'Q'$ である．よって D の面積は $16\sqrt{2}$.

（6）ヤコビアンは $\det\begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x\end{pmatrix} = 4(x^2+y^2)$ だから，

$$\int_D dsdt = \int_S 4(x^2+y^2)dxdy.$$

3（1）C のパラメータ表示として，$x = \sqrt{1-t}, y = \sqrt{t}$ $(0 \leq t \leq 1)$ をとると，

$$\begin{aligned}\int_C x^7y^6dy &= \int_0^1 (1-t)^{\frac{7}{2}}t^3 \cdot \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2}+1, \frac{5}{2}+1\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{9}{2})\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(8)} = \frac{1}{2}\frac{1}{7!}\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5\pi}{2^{12}} = \frac{5\pi}{4096}.\end{aligned}$$

（2）写像 $(s,t) \mapsto (s+t, st)$ は，st 平面の部分 $E : st \geq 2, s+t \leq 3, s \geq 0$ を，面積 0 の部分 $s = t$ を除いて，xy 平面の部分 D に 2 対 1 に写す．ヤコビアンは $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & s\end{pmatrix} = s - t$ だから，変数変換の公式より，

$$\begin{aligned}&\int_D \sqrt{x^2-4y}\,dxdy = \frac{1}{2}\int_E (s-t)^2 dsdt = \frac{1}{2}\int_1^2 dt \int_{\frac{2}{t}}^{3-t}(s-t)^2 ds \\ =& \frac{1}{6}\int_1^2 \left[(s-t)^3\right]_{\frac{2}{t}}^{3-t} dt = \frac{1}{6}\int_1^2 (3-2t)^3 dt - \frac{1}{6}\int_1^2 \left(\frac{2}{t} - t\right)^3 dt \\ =& \frac{1}{6}\left[\frac{(3-2t)^4}{4\cdot(-2)}\right]_1^2 + \frac{1}{6}\int_1^2 t^3 - 6t + \frac{12}{t} - \frac{8}{t^3}dt = \left[\frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{2} + 2\log t + \frac{2}{3t^2}\right]_1^2 \\ =& \frac{15}{24} - \frac{3}{2} + 2\log 2 + \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = -\frac{11}{8} + 2\log 2.\end{aligned}$$