

提出先：教養学部教務課前のレポートボックス

提出期間：2019/11/18（月）～2019/12/3（火）13:00

※ このファイルを **B4** サイズの用紙に縦向きに印刷し，レポート用紙とすること．紙面の大きさは B4 に設定されているが，プリンタの設定は各自で確認すること．なお，印刷が困難である場合には速やかに足助まで申し出ること．

学生証番号	氏名	共同作成者（ある場合）

問.  $X \in M_2(\mathbb{R})$  について  $\|X\| = \sqrt{\text{tr } {}^t X X}$  と置く.  $X = [x_{ij}]$  ならば  $\|X\| = \sqrt{x_{11}^2 + x_{12}^2 + x_{21}^2 + x_{22}^2}$  である.

また,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  と置く.

1)  $X = [x_{ij}] \in M_2(\mathbb{R})$  について  $\sigma_{\pm}(X)$  を

$$\sigma_+(X) = \frac{x_{11} + x_{22} + \sqrt{(x_{11} - x_{22})^2 + 4x_{12}x_{21}}}{2},$$

$$\sigma_-(X) = \frac{x_{11} + x_{22} - \sqrt{(x_{11} - x_{22})^2 + 4x_{12}x_{21}}}{2}$$

により定める.  $X$  の複素数の範囲での固有値の全体は  $\{\sigma_+(X), \sigma_-(X)\}$  で与えられることを示せ ( $\sigma_+(X) \neq \sigma_-(X)$  とは限らない).

2)  $X \in M_2(\mathbb{R})$  が  $\|X - A\| < \frac{1}{8}$  を満たすならば  $X$  は異なる二つの実固有値を持つことを示せ.

※  $\frac{1}{8}$  はもっと大きく取れる.  $\frac{1}{8}$  よりも大きい値について主張が示せるならばそれでも構わない.

3)  $X(b, c) = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$  とし,  $\|X(b, c) - A\| < \frac{1}{8}$  が成り立つとする. このとき,  $P(b, c) \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  を次のように

定めよ.

i)  $P(b, c)$  の各成分は  $b, c$  に関して連続である.

ii)  $P(b, c)^{-1} X(b, c) P(b, c)$  は対角行列である.

※  $X(a, b, c, d) = \begin{bmatrix} 1+a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  として,  $P(a, b, c, d) \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  を考えることにしても同様のことが示せる. これはレポート問題とはしないが, 興味があれば考えてみよ.

※ 参考文献がある場合には最後にまとめて箇条書きで示すこと.

※ 裏面を用いても良いが, 表面の末尾にその旨示すこと. また, 裏面を用いる際には表面と上下が同一になるように (左あるいは右綴じになるように) 用いること.

※ 共同作成者に記載がないにもかかわらず, ほかのレポートとほぼ同一であるレポートが散見される. 誰かと共同してレポートを作成することは構わないが, そのことは明記すること. それをしなければ剽窃であって, これは学術上の致命的な不正行為である. 万一, 写される側がそのことを承知していなかったことが露見した場合には重大な結果をもたらす可能性がある.

(以上)