

提出先：教養学部教務課前のレポートボックス

提出期間：2019/9/30（月）～2019/10/8（月）13:00

※ このファイルを **B4** サイズの用紙に縦向きに印刷し，レポート用紙とすること．紙面の大きさは B4 に設定されているが，プリンタの設定は各自で確認すること．なお，印刷が困難である場合には速やかに足助まで申し出ること．

学生証番号	氏名	共同作成者（ある場合）

問. $\mathbb{R}[x]$ 上の内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を $f, g \in \mathbb{R}[x]$ について

$$\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

と置くことにより定める．なお，以下では必要に応じて微分積分学の講義で扱った定理などを用いて良い．

1) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は実際に内積であることを示せ．

さて， $n \in \mathbb{N}$ について， $P_n \in \mathbb{R}[x]$ の元を

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

により定める．

●) P_n は n 次多項式であることを確かめよ．これは各自で確かめれば良い（解答は不要である）．

2) $\langle P_n | P_m \rangle = \begin{cases} 2 & n = m, \\ \frac{2}{2n+1}, & n = m, \\ 0, & n \neq m \end{cases}$ が成り立つことを示せ．このことを $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は直交系をなすという．

ヒント：地道に部分積分を繰り返しても良いし， P_n が満たす漸化式を用いたりすることもできる．

P_n は (n 次の) **Legendre** (ルジャンドル) 多項式と呼ばれ，物体の相互作用を扱う際にしばしば現れる．ルジャンドル多項式は微分方程式の解として定めたり，ある函数のテーラー展開の係数として定めることもできる．同様の函数には例えば Hermite (エルミート) 多項式などがある．

※ 参考文献がある場合には最後にまとめて箇条書きで示すこと．

※ 裏面を用いても良いが，表面の末尾にその旨示すこと．また，裏面を用いる際には表面と上下が同一になるように（左あるいは右綴じになるように）用いること．

※ 共同作成者に記載がないにもかかわらず，ほかのレポートとほぼ同一であるレポートが散見される．誰かと共同してレポートを作成することは構わないが，そのことは明記すること．それをしなければ剽窃であって，これは学術上の致命的な不正行為である．万一，写される側がそのことを承知していなかったことが露見した場合には重大な結果をもたらす可能性がある．

(以上)