2019 年度線型代数学演習（理 I 6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題 12v 1　　’19/12/23（火）
’19/12/23 :（v1）初版作成．概ね最終回までの内容である．

※ 以下の問は小問に分かれているが，これらは解き方によっては同時，あるいはほぼ同時に解ける．そのような場合には無理に解答を分割する必要はない．

問 12.1. $t, s \in \mathbb{R}$ とし，$A \in M_3(\mathbb{R})$ を

$$A = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & 2 & s \\ 0 & -s & 2 \end{bmatrix}$$

により定める．

1) A が $\mathbb{C}$ 上対角化可能であるための t, s に関する必要十分条件を求めよ．また，A が $\mathbb{C}$ 上対角化可能であるとき，$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ であって，$P^{-1}AP$ が対角行列であるようなものを一つと，その P について $P^{-1}AP$ をそれぞれ求めよ．
2) A が $\mathbb{R}$ 上対角化可能であるための t, s に関する必要十分条件を求めよ．また，A が $\mathbb{R}$ 上対角化可能であるとき，$Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ であって，$Q^{-1}AQ$ が対角行列であるようなものを一つと，その Q について $Q^{-1}AQ$ をそれぞれ求めよ．

以下では線型空間として常に $\mathbb{R}$ 上のものを考える．

問 12.2. (x, y, z) を $\mathbb{R}^3$ の標準的な座標とする．$\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ とし，$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を z 軸を軸とする，正の向きの φ 回転とする．即ち，z 軸上の点は動かさず，xy-平面上では正の向き（反時計回り）の φ の回転であるような，$\mathbb{R}^3$ 全体の回転を f とする．同様に，$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を y 軸を軸とする，正の向きの θ 回転（zx-平面上では正の向きの θ 回転であるような $\mathbb{R}^3$ 全体の回転）とする．最後に，(e_1, e_2, e_3) を $\mathbb{R}^3$ の標準的な基底とする．

0) f, g をそれぞれ簡潔に図示せよ．f の図と g の図は分けること．
   ※ あまり精密に描く必要はない．
1) (e_1, e_2, e_3) に関する f, g 及び $f \circ g$ の表現行列を求めよ．以下ではこれを A, B, C とする．
2) $\det A, \det B$ 及び $\det C$ を求めよ．
3) $r \in \mathbb{R}$ とし，$v = rCe_3 (= Cre_3)$ と置く．また，

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial r} & \dfrac{\partial v}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

   と置く．この時，J と $\det J$ を具体的に求めよ．

問 12.3.

$$V = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ が存在して } f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \text{ が} \\ \text{成り立つようなもの全体} \end{array} \right\}$$

と置く．V は多項式の和および実数倍に関して線型空間である．また，非負の整数 m について $\langle f \mid g \rangle_{(m)}$ を次のように定める．即ち，$f, g \in V$ について

$$\langle f \mid g \rangle_{(m)} = \sum_{k=0}^{m} f(k) g(k)$$

と定める．$m = 2$ とすると $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{(2)}$ は V のユークリッド計量である．最後に，V の部分線型空間 W を

$$W = \{ f \in V \mid f(0) = 0 \}$$

により定める．なお，V が線型空間であること，W が V の部分線型空間であることや $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{(2)}$ が V のユークリッド計量であることは認めて良い．

1) W の $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{(2)}$ に関する正規直交基底を一組求めよ．
2) W の $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{(2)}$ に関する（V における）直交補空間の基底を一組求めよ．
3) $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{(m)}$ が V のユークリッド計量であるための m に関する必要十分条件を求めよ．

問 12.4. $\mathbb{R}^4$ 上の二次形式 q を $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ について

$$q(x) = x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4 + x_4^2$$

と置くことにより定める．また，$\mathbb{R}^4$ の部分線型空間 V について，q_V を q の V への制限とする（$q(x)$ の x として，V の元しか考えないことにしたものを q_V とする）．q_V は V 上の二次形式である（このことは認めて良い）．

1) q の符号（signature）を求めよ．
2) $a \in \mathbb{R}$ とする．$\mathbb{R}^4$ の部分線型空間 V_a を

$$V_a = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_3 = a x_4 \right\}$$

により定め，$q_a = q_{V_a}$ と置く．q_a の符号を求めよ．
3) q_V が正値（正定値）であるような $\mathbb{R}^4$ の部分線型空間 V が存在するならば，そのような V のうち最も次元が高いものの一つについて基底を一組与えよ（V の次元が最も高いことは示さなくて良い）．もしそのような V が存在しないのであればそのことを示せ．

（以上）