2019 年度線型代数学演習（理 I 6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題 11 v4　'19/12/10（火）
'19/12/5 :（v1）初版作成.
'19/12/8 :（v2）問 11.2 の 2)，3) を追加．また，定理 11.13 以降を追加．後者に関してはやや進んだ事柄なので，後回しにして良い．
'19/12/9 :（v3) 問 11.17 を追加．問 11.1 のヒントの誤植を訂正．問 11.3 に $*$ を追加．線型代数学に関する限り，後回しにして良い．
'20/1/10 :（v4）問 11.6 の 4) を修正．

以下では $K=\mathbb{R}$ あるいは $K=\mathbb{C}$ とする．また，V を線型空間とし，$K=\mathbb{R}$ の場合には $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ をユークリッド計量，$K=\mathbb{C}$ の場合には $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ をエルミート計量とする．

問 11.1 (問 10.7 の続き)．$A,B\in M_n(K)$ について $\langle A\mid B\rangle=\operatorname{tr}A^*B$ と定める．$\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ は $M_n(K)$ のユークリッド内積（$K=\mathbb{R}$ の場合）あるいはエルミート内積（$K=\mathbb{C}$ の場合）である．

1) $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$ が成り立つことを示せ．
2) $\lambda\in K$ とすると $\|\lambda A\|=|\lambda|\,\|A\|$ が成り立つことを示せ．
3) $\|A\|=0$ ならば $A=O_n$ が成り立つことを示せ．
4) $\|A\|=\sqrt{\langle A\mid A\rangle}$ が成り立つことを示せ．また，$A=[a_1\cdots\ a_n]=[a_{ij}]$ とすると，$\|A\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|^2}=\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}$ が成り立つことを示せ．
5) $\left\|{}^tA\right\|=\|A\|$ および $\|A^*\|=\|A\|$ が成り立つことを示せ．
6) $|\langle A\mid B\rangle|\le\|AB\|\le\|A\|\,\|B\|$ が成り立つことを示せ．
ヒント：後半については次のように考えてみよ．まず $C=A^*$ と置く．$\|C\|=\|A\|$ が成り立つから，$\|C^*B\|\le\|C\|\,\|B\|$ が成り立つことを示せば良い．$C=[c_1\ \cdots\ c_n]$，$B=[b_1\ \cdots\ b_n]$ と列ベクトルを用いて表せば，C^*B の (i,j) 成分は $\langle c_i\mid b_j\rangle$ に等しい．従って $\|C^*B\|^2=\sum_{i,j}|\langle c_i\mid b_j\rangle|^2$ が成り立つ．あとはコーシー・シュワルツの不等式を適宜用いればよい．前半については $\langle A\mid B\rangle=\operatorname{tr}CB$ が成り立つことを用いればよい．

問 11.2. $A\in M_n(K)$，$f,g\in K[x]$ とする．

1) $P\in\mathrm{GL}_n(K)$ とすると
$$f(P^{-1}AP)=P^{-1}f(A)P$$
が成り立つことを示せ．
2) $fg(A)=f(A)g(A)$ が成り立つことを示せ．

3) $A_1, \dots, A_r$ を正方行列とし，$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$ が成り立つとする．このとき，$f(A) = f(A_1) \oplus \cdots \oplus f(A_r)$ が成り立つことを示せ．

問 11.3 ***.** $A \in M_n(K)$ とする．

1) a を A の成分とすると，$|a| \leq \|A\|$ が成り立つことを示せ．
2) $\left\| \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \|A\|^n$ が成り立つことを示せ．
3) $M \geq 0$ とし，$X_M = \{A \in M_n(K) \mid \|A\| \leq M\}$ と置く．すると，$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n$ の各成分は，X_M 上一様に絶対収束することを示せ．
   ヒント：指数函数のテーラー展開 $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$ は $[-M, M]$ 上一様に絶対収束する．

問 11.4. $A \in M_n(\mathbb{C})$ を以下のように定める時，$\exp A$ を求めよ．
※ A を Jordan 標準形に変形すれば $\exp A$ は求まるが，必ずそうしなければいけないのではない．実際には A^k が具体的に求まれば十分であって，Jordan 標準形を用いると却って難しくなることも少なくない．

1) $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$，ただし $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ とする．
2) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$　3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$　4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
5) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.
   ヒント：$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{bmatrix}$ と区分けする（どのように分ければ良いかは考えよ）．適切に区分けすれば $A_1 A_2 = A_2 A_3 = O$ が成り立ち，A^k は容易に求まる．${A_1}^k$，${A_3}^k$ を求める必要が生じるが，これは Jordan 標準形に頼らず，直接計算してしまった方がむしろ容易である．

数列について

問 11.5. $a_1, \dots, a_{m-1}, b \in K,\ a_{m-1} \neq 0$ とする．また，

$$V_b = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in K,\ x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_m x_{n-m} = b\}$$

とする．以下では $a_1, \dots, a_{m-1}$ は固定し，b が変化すると考える．

1) $b=0$ とする．

i) $v=[v_i]_{0\leq i\leq m-1}\in K^m$ とすると，$(x_n)\in V_0$ であって，$0\leq k\leq m-1$ について $x_k=v_k$ が成り立つものが一意的に存在することを示せ．この $(x_n)\in V_0$ を $[v]$ で表すことにする．

ii) $\varphi\colon K^m\to V_b$ を

$$\varphi(v)=[v]$$

により定めると φ は線型同型写像であることを示せ．

2) $V_b\neq\varnothing$ が成り立つことを示せ．

3) $y\in V_b$ とする．$\psi\colon V_b\to V_0$ が $\psi(z)=z-y$ により定まり，全単射であることを示せ．ただし，$z-y$ で $(z-y)_n=z_n-y_n$ が成り立つような数列を表す．

問 11.6. $a_1,\dots,a_m\in K$ とし，

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_m & -a_{m-1} & & \cdots & & -a_1 \end{bmatrix}\in M_m(K)$$

とする．

1) A の固有多項式を φ とすると

$$\varphi(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m$$

が成り立つことを示せ．

2) $\det A=(-1)^m a_m$ が成り立つことを示せ．

3) λ を A の固有値とする．λ に属する A の固有空間は 1 次元であることを示せ．

4) A が K 上対角化可能であることと，A の固有多項式のいずれの根も K の元であって，また，重複度が 1 に等しい[†1]ことは同値であることを示せ．

問 11.7 ** (難しくはないが，Jordan 標準形に関することなので範囲外とする)．

※ 記号については第 9 回の演習などを参照のこと．

A をコンパニオン行列とし，A の固有多項式は $(x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_r)^{m_r}$，ただし $i\neq j$ ならば $\lambda_i\neq\lambda_j$，と因数分解されるとする．

1) $r=1$ とする（従って $m_1=n$ が成り立つ）．このとき，$(A-\lambda_1E_n)^{n-1}\neq O_n$ かつ $(A-\lambda_1E_n)^n=O_n$ が成り立つことを示せ．

[†1] 重複度が 1 に等しい根を**単根**と呼ぶ．

ヒント：前半については，e_n に $A-\lambda_1 E_n$ を繰り返し掛けてみよ．後半は例えば $A-\lambda_1 E_n$ を三角化してみよ．

2) $r=1$ とする．1) を踏まえて，$0 \leq k \leq n-1$ について $p_k=(A-\lambda_1 E_n)^k e_n$ と置き，$P=[p_{n-1}\ \cdots\ p_0]$ とする（順序に注意）．このとき，$P^{-1}AP=J_n(\lambda_1)$ が成り立つことを示せ．
3) 一般の場合を考える．このとき，A の Jordan 標準形は $J_{m_1}(\lambda)\oplus\cdots\oplus J_{m_r}(\lambda_r)$ であることを示せ．

問 11.8. 次の漸化式で定まる数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の一般項を求めよ．また，$x_0, x_1, \ldots, x_k$ が数列を一意的に定めるような最小の k を求めよ（必要ならば問 11.5 を参考にせよ．k に関しては結果のみ示せば良い）．

例：$x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$ により定まる数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の一般項は $x_n = (-1)^n\alpha + 2^n\beta$，$\alpha = \dfrac{2x_0 - x_1}{3}$，$\beta = \dfrac{x_0 + x_1}{3}$ で与えられる．また，$k=1$ である．

1) $x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 0.$
2) $x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = 0.$
3) $x_n - 3x_{n-1} - 4x_{n-2} + 12x_{n-3} = 0.$
4) $x_n - 3x_{n-1} - 4x_{n-2} + 12x_{n-3} = 1.$
5) $x_n - 3x_{n-1} - 3x_{n-2} + 4x_{n-3} = 0.$
6) $x_n - 3x_{n-1} - 3x_{n-2} + 4x_{n-3} = 1.$
7) $x_n - 3x_{n-1} + 3x_{n-2} - x_{n-3} = 0.$

※ 行列を用いて解くとする．漸化式に対応するコンパニオン行列を A とすると，A は対角化不可能である．$P^{-1}AP$ を冪乗を求めやすい形にしないと計算が困難になる．一般には Jordan 標準形を用いるのが一般的であるが，冪乗が求まれば良いので工夫してみよ．あるいは問 11.7 の結果を認めてしまって，$P^{-1}AP$ を Jordan 標準形にしてもよい．

微分方程式に関して

問 11.9. $A\in M_n(K)$ とする．$F\colon M_n(K)\to K$ を，$X=[x_1\ \cdots\ x_n]\in M_n(K)$ について

$$F(X)=\det[Ax_1\ x_2\ \cdots\ x_n]+\det[x_1\ Ax_2\ x_3\ \cdots\ x_n]+\cdots+\det[x_1\ x_2\ \cdots\ x_{n-1}\ Ax_n]$$

と置くことにより定める．このとき，$F(X)=\mathrm{tr}(A)\det X$ が成り立つことを示せ．

ヒント：行列式の特徴付け（講義の定理 4.2.5）を用いるのが簡明である．

問 11.10. $A\colon \mathbb{R} \to M_n(K)$ とし，$A = [a_1 \ \cdots \ a_n]$ と表すと，各 a_i は K^n-値函数として微分可能だとする．このとき，

$$D \det A = \det[Da_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] + \det[a_1 \ Da_2 \ a_3 \ \cdots \ a_n] + \cdots + \det[a_1 \ \cdots \ a_{n-1} \ Da_n]$$

が成り立つことを示せ．ここで D は変数に関する微分を表す．
※ ここでは列に分割したが，行に分割しても同様のことが成り立つ．

問 11.11. $A \in M_n(K)$ とし，$t \in \mathbb{R}$ とする．また，$F\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(K)$ を $F(t) = \det\exp At$ により定める．

1)
$$DF(t) = (\operatorname{tr} A)F(t)$$
が成り立つことを示せ．

2) $F(t) = e^{(\operatorname{tr} A)t}$ が成り立つことを示せ．

3) $\det\exp A = e^{\operatorname{tr} A}$ が成り立つことを示せ．

※ 同様のことが，$\exp tA$ をもう少し一般的な函数に置き換えた状況で現れる．この時には F は**ロンスキアン**と呼ばれる．

三角化について

講義で扱った次の定理について，もう少し細かく調べる．

定理 11.12 (定理 6.4.4)**.** $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ について $B \in M_n(\mathbb{C})$ であって，$\mathbb{C}$ 上対角化可能かつ $\|A - B\| < \epsilon$ が成り立つものが存在する．$A \in M_n(\mathbb{R})$ であって，A の固有値が全て実数であるならば $B \in M_n(\mathbb{R})$ であって，B は $\mathbb{R}$ 上対角化可能であるようにできる．

一般には $A \in M_n(\mathbb{R})$ であっても A の固有値は全て実数であるとは限らない．この時には次が成り立つ．

定理 11.12'. $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ について $B \in M_n(\mathbb{R})$ であって，$\mathbb{C}$ 上対角化可能かつ $\|A - B\| < \epsilon$ が成り立つものが存在する．

つまり，B は $\mathbb{R}$ 上対角化可能とは限らない（A が実数でない固有値を持てば，実際には B は $\mathbb{R}$ 上対角化不可能である）が，$\mathbb{C}$ 上対角化可能である．
以下ではこのことを示す．まず次を示す．

定理 11.13. $A \in M_n(\mathbb{R})$ とし，A の固有値の全体を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \overline{\mu_1}, \ldots, \mu_s, \overline{\mu_s}$ とする．ただし，固有値はそれぞれ重複度の数だけ並べる（例えば 1 が A の固有値であって，重複度が 2 な

らば $\lambda_1=\lambda_2=1$ とする）．また，$\mu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ について，$\mu=\alpha+\sqrt{-1}\beta$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ と表して $R(\mu)=\begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$ と置く．すると，$P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が存在し，

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & \ast & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_r & & & \\ & & & & R(\mu_1) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & R(\mu_s)\end{bmatrix} \tag{11.14}$$

が成り立つ．

問 11.15 **. 1) $v_1,\dots,v_r\in\mathbb{R}^n$ が存在して

i) $v_1,\dots,v_r$ は線型独立であって，

ii) $\{v_1,\dots,v_r,v_{r+1},\dots,v_n\}$ を $\{v_1,\dots,v_r\}$ を拡大して得られる $\mathbb{R}^n$ の基底として $P_1=[v_1\ \cdots\ v_n]$ とすると

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & \ast & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_r & \\ & & & & A'\end{bmatrix},$$

ただし $A\in M_{n-r}(\mathbb{R})$，

がそれぞれ成り立つことを示せ．

2) A' の固有値は $\mu_1,\overline{\mu_1},\dots,\mu_s,\overline{\mu_s}$ であることを示せ．

さて，$m=n-r(=2s)$ とする．$A'\in M_m(\mathbb{R})$ である．$u_1\in\mathbb{C}^m$ を μ_1 に属する A' の固有ベクトルとし，$\mu_1=\alpha_1+\sqrt{-1}\beta_1$，$u_1=v_1+\sqrt{-1}w_1$，$\alpha_1,\beta_1\in\mathbb{R}$，$v_1,w_1\in\mathbb{R}^n$ と表す．すると $A'u_1=\mu_1u_1$ が成り立つことから，

$$A'[v_1\ \ -w_1]=[v_1\ \ -w_1]\begin{bmatrix}\alpha_1 & -\beta_1\\ \beta_1 & \alpha_1\end{bmatrix}=[v_1\ \ -w_1]R(\mu_1)$$

が成り立つ．

3) $v_1,-w_1$ は線型独立であることを示せ．

ヒント：$\mathrm{rank}_{\mathbb{C}}[v_1\ \ -w_1]=\mathrm{rank}_{\mathbb{C}}[v_1\ \ -w_1]\begin{bmatrix}1 & 1\\ -\sqrt{-1} & \sqrt{-1}\end{bmatrix}=\mathrm{rank}_{\mathbb{C}}[u_1\ \overline{u_1}]$ が成り立つ．$u_1,\overline{u_1}$ は A の異なる固有値 $\mu_1,\overline{\mu_1}$ に属するから線型独立である．従って $\mathrm{rank}_{\mathbb{C}}[v_1\ -w_1]=2$ が成り立つ．

さて，$\{v_1,-w_1,q_3,\dots,q_m\}$ を，$\{v_1,-w_1\}$ を拡大して得られる $\mathbb{R}^m$ の基底とし，$Q'=[v_1\ \ -w_1\ q_3\ \cdots\ q_m]$ とする．$Q'\in\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ である．

4) $A'Q' = Q' \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & * & * & \cdots & * \\ \beta_1 & \alpha_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$ が成り立つことを示せ．

5) 定理 6.4.5 の証明と同様に議論を進め，$Q \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ であって，

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} R(\mu_1) & * & \cdots & * \\ 0 & R(\mu_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & R(\mu_s) \end{bmatrix}$$

が成り立つ物が得られることを示せ．

6) $P = P_1 \begin{bmatrix} E_r & \\ & Q \end{bmatrix}$ とすれば，P が求める行列であることを示せ．

問 11.16 ****(定理 11.12' の証明)．** $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．すると，定理 11.13 のような $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が存在する．

1) 任意の $\epsilon > 0$ について，(11.14) の右辺と同様の形をした行列 B であって，固有値が全て異なり，かつ $\left\|P^{-1}AP - B\right\| < (\|P\|^{-1}\|P\|)^{-1}\epsilon$ が成り立つものが存在することを示せ．
2) $PBP^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ は $\mathbb{C}$ 上対角化可能であって，$\|A - B\| < \epsilon$ が成り立つことを示せ．

ところで，B が $\mathbb{R}$ 上対角化可能ならば B の固有値は全て実数である．一方，A の固有値には実数でない複素数（即ち，虚部が 0 でない複素数）が含まれるならば，A に十分近い行列の固有値のいずれかは虚部が 0 でない（これは非自明な事実であるが，ここでは認める）．従って B は $\mathbb{R}$ 上対角化不可能である．

問 11.17. 次の行列を上三角行列に三角化せよ．ただし，実行列であって，固有値が全て実数である場合には実行列を用いて三角化せよ．

※ 対角行列は上三角行列（かつ下三角行列）である．また，三角化の結果は一意的ではない．

1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$　2) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$　3) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

（以上）