２０１９年度線型代数学（理Ｉ 6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題 v5　　　2019/8/3（土）

'19/8/3 :（v1）暫定的に作問．追って問を加える．

'19/8/6 :（v2）問を追加．問 100.2 の 5) と 6) を修正．追って問を加える．

'19/8/11 :（v3）問を追加．問 100.8 以降は後日番号を変える．

'19/8/20 :（v4）問 100.7 の 4) の文言を修正．問 100.8,9,10 を追加の上，問の番号を一部変更．

'19/10/29 :（v5）問 100.12 の 3) を修正．学生からの指摘による．

以下では $K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とする．

問 100.1. 既約行階段行列（被約行階段行列）の定義を述べよ．

以下では，講義や試験と同様に，既約行階段行列（被約行階段行列）を単に行階段行列と呼ぶ．

問 100.2. $A \in M_{m,n}(K)$ とする．

1) $[A \,|\, E_m]$ に左基本変形を施して $[B \,|\, P]$，ただし $B \in M_{m,n}(K)$，を得たとする．このとき，$P \in \mathrm{GL}_m(K)$ であって，また，$B = PA$ が成り立つことを示せ．
2) $\operatorname{rank} A = m$ とする．このとき，$m \leq n$ が成り立つことを示せ（講義で示した定理を適宜用いて良い）．
3) $\operatorname{rank} A = m$ とし，A は行階段行列とする．$P \in \mathrm{GL}_m(K)$ について PA が行階段行列ならば $P = E_m$ が成り立つことを示せ．
4) $\operatorname{rank} A = m$ とする．$P, P' \in \mathrm{GL}_m(K)$ について $PA, P'A$ が共に行階段行列ならば $P = P'$ が成り立つことを示せ．
5) $\operatorname{rank} A = r < m$ とし，A は行階段行列とする．$P \in \mathrm{GL}_m(K)$ について PA が行階段行列であることと，ある $Q \in \mathrm{GL}_{m-r}(K)$ と $R \in M_{r,m-r}(K)$ が存在して $P = \begin{bmatrix} E_r & R \\ O_{m-r} & Q \end{bmatrix}$ が成り立つことは同値であることを示せ．
6) $\operatorname{rank} A = r < m$ とする．$P, P' \in \mathrm{GL}_m(K)$ について $PA, P'A$ が共に行階段行列あることと，ある $Q \in \mathrm{GL}_{m-r}(K)$ と $R \in M_{r,m-r}(K)$ が存在して
$$P' = \begin{bmatrix} E_r & R \\ O_{m-r} & Q \end{bmatrix} P$$
が成り立つことは同値であることを示せ．

問 100.3. $f\colon K^n \to K^m$ を $v \in K^n$ について $f(v) = Av$ と置くことにより定める．

1) f は K-線型写像であることを示せ．
2) K^n，K^m の標準的な順序付き基底をそれぞれ $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ とする．このとき，f の $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ に関する表現行列は A に等しいことを示せ．

3) $\mathscr{P} = (p_1, \ldots, p_m)$，$\mathscr{Q} = (q_1, \ldots, q_n)$ をそれぞれ K^m, K^n の順序付き基底とする．$P = [p_1 \ \cdots \ p_m]$, $Q = [q_1 \ \cdots \ q_n]$ と置くと，P, Q は正則であって，また，$(\mathscr{Q}, \mathscr{P})$ に関する f の表現行列は $P^{-1}AQ$ に等しいことを示せ．

定義． V を K-線型空間とする．V の K-部分線型空間 W, U について

1) $V = W + U$.
2) $W \cap U = \{o\}$（o は V の零元）．

が成り立つとき，V は W と U の**直和**であると言い，$V = W \oplus U$ と表す．

問 100.4. $M_n(K)$ の部分線型空間 W を

$$W = \{A \in M_n(K) \mid A = {}^t\!A\}$$

により定める．また，$M_n(K)$ の部分集合 U_1, U_2, U_3, Z をそれぞれ

$$U_1 = \{A \in M_n(K) \mid A \text{ は上三角行列であって，対角成分は全て } 0 \text{ に等しい}\},$$

$$U_2 = \{A \in M_n(K) \mid A \text{ は下三角行列であって，対角成分は全て } 0 \text{ に等しい}\},$$

$$U_3 = \{A \in M_n(K) \mid {}^t\!A = -A\},$$

$$Z = \{A \in M_n(K) \mid \exists\, B \in U_1,\ A = E_n + B\}$$

により定める．

1) W の基底を一組求めよ．また，$\dim W = n(n+1)/2$ が成り立つことを示せ．
2) U_1 は $M_n(K)$ の部分線型空間であって，$M_n(K) = W \oplus U_1$ が成り立つことを示せ．また，$\dim U_1$ の基底を一組求めよ．
3) U_2 は $M_n(K)$ の部分線型空間であって，$M_n(K) = W \oplus U_2$ が成り立つことを示せ．また，$\dim U_2$ の基底を一組求めよ．
4) U_3 は $M_n(K)$ の部分線型空間であって，$M_n(K) = W \oplus U_3$ が成り立つことを示せ．また，$\dim U_3$ の基底を一組求めよ．
5) Z は $M_n(K)$ の部分線型空間ではないことを示せ．一方，直和と似た条件
   a) $M_n(K) = \{C \in M_n(K) \mid \exists\, A \in W,\ \exists\, B \in Z,\ C = A + B\}$.
   b) $W \cap U = \{E_n\}$.

   が成り立つことを示せ．また，線型独立な $M_n(K)$ の元 $B_1, \ldots, B_r$ であって，1) で求めた W の基底を $\{A_1, \ldots, A_{n(n+1)/2}\}$ とすると $\{A_1, \ldots, A_{n(n+1)/2}, B_1, \ldots, B_r\}$ が $M_n(K)$ の基底であるようなものを一組求めよ（r は適宜定めること）．
6) 5) のように $B_1, \ldots, B_r$ を定めると，（$B_1, \ldots, B_r$ の定め方によらず）$r = n(n-1)/2$ が成り立つことを示せ．

問 100.5 (多分既に出題した)**.** V を K-線型空間とし，$W \subset V$ を K-部分線型空間とする．即ち，W は空でなく，V の加法と定数倍で閉じているとする．このとき，W は自然に K-線型空間であることを示せ．

問 100.6 ***.** $V = \varnothing$ とする．

1) $V \subset \mathbb{R}^n$ が成り立つことを示せ．即ち，$v \in V \Rightarrow v \in \mathbb{R}^n$ が成り立つことを示せ．
2) $v, v' \in V \Rightarrow v + v' \in V$ が成り立つことを示せ．
3) $v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v \in V$ が成り立つことを示せ．

4**) V には実線型空間の構造は入らないことを示せ．即ち，V に演算（加法，定数倍）をどのように定めても V は実線型空間とはならないことを示せ．

ヒント：1) から 3) は論理の問題である．命題「$A \Rightarrow B$」がいつ真となるか考えてみよ．

問 100.7. $X = \{A \in M_4(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A,\ A$ の対角成分はいずれも 0 に等しい $\}$ と置く．さて，X のいくつかの元を次のように，少し省略して表したとする．即ち，

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots\dots\dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と表したとする．

1) 省略しなかった場合，考えている元は全体としては

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

だとする．このとき，冒頭の表し方のように省略した理由を考えよ．

※ 絶対的な正解はないが，大多数の者が妥当だと考えると思われる理由を考えよ．以下同様．

2) 省略しなかった場合，考えている元は全体としては

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

だとする．このとき，冒頭の表し方のように省略した理由を考えよ．

3) 省略しなかった場合，考えている元は全体としては

$$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

だとする．このとき，冒頭の表し方のように省略した理由を考えよ．

※ このように，一定の規則に従って並んでいるような行列を，いくつかの元を示すことにより記述する場合にはそれなりの慎重さ，詳しさが必要になる．同様の問題は色々な場面で現れる．例えば数列の一般項を，いくつかの項を具体的に示すことにより類推させる場合には同様の問題が生じる．

4) $1 \leq i < j \leq n$ とし，$A_{ij} \in X$ を (i, j) 成分及び (j, i) 成分が 1 に等しく，その他の成分はいずれも 0 に等しい元とする．このとき，$\{A_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ は一意的に定まることを確かめよ（従って，例えば 1) から 3) のいずれも当てはまってしまうような曖昧さは一切持たない）．また，これは 1) から 3) のいずれと一致するか述べよ．いずれとも一致しない場合にはそのことを示せ．

問 100.8. V を K-線型空間とし，$U, W \subset V$ を K-部分線型空間とする．

1) $V = K^n$ とする．$U \cap W \neq \varnothing$ が成り立つことを示せ．
2) V を一般の K-線型空間とする．$U \cap W \neq \varnothing$ が成り立つことを示せ．

問 100.9. $a, b, c \in \mathbb{R}$ とし，$v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ を

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\a\end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\bc-1\\-b\end{bmatrix},\ v_4 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

により定める．

1) v_1, v_2 が線型独立であるための a に関する必要十分条件を求めよ．
2) v_3, v_4 は b, c によらず線型独立であることを示せ．
3) $\mathrm{rank}[v_1\ v_2\ v_3\ v_4]$ を求めよ．
4) v_1, v_2, v_3, v_4 が線型独立であるための a, b, c に関する必要十分条件を求めよ．

問 100.10 (問 4.11 も参照のこと)**.** $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$ を

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ v_4 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

により定める．また，$U = \mathrm{Span}\{v_1, v_2\},\ W = \mathrm{Span}\{v_3, v_4\}$ とする．

1) $v_3, v_4 \notin U$，$v_1, v_2 \notin W$ がそれぞれ成り立つことを示せ．

2) $U \cap W \neq \{o\}$ であることを示せ（ただし，o は $\mathbb{R}^3$ の零元とする）．また，$U \cap W$ の基底を一組求めよ．

問 100.11. $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とし，$A = [a_1 \ \cdots \ a_n]$ と列ベクトルを用いて表す．$k \leq n$ とすると，$\mathrm{rank}[a_1 \ \cdots \ a_k] = k$ が成り立つことを示せ．

問 100.12. $K[x] = \{K$ を係数とする，x に関する（x を変数とする）多項式全体$\}$ と置く．また，$n \in \mathbb{N}$ について，$K_n[x] = \{f \in K[x] \mid f$ は高々n 次$\}$ とする．ただし，多項式 0 は任意の $n \in \mathbb{N}$ について n 次であるとする（多項式のみを考えるときにはこのように考え，特に述べないことが多い）．また，K の元 x について $x^0 = 1$ と定める．

※ $K[x]$ は一般的な記号であるが，$K_n[x]$ は必ずしもそうではない．

以下では $x_0, x_1, \ldots, x_k, y_0, y_1, \ldots, y_k \in K$ とする．

1) $f \in K_n[x]$ とし，$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ と表す．このとき，条件

i) 任意の i，$0 \leq i \leq k$，について $y_i = f(x_i)$ が成り立つ．

ii)

$$(*) \qquad [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_n] \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_k \\ {x_0}^2 & {x_1}^2 & \cdots & {x_k}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_0}^n & {x_1}^n & \cdots & {x_k}^n \end{bmatrix} = [y_0 \ y_1 \ \cdots \ y_k]$$

が成り立つ

は同値であることを示せ．

2)

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_k \\ {x_0}^2 & {x_1}^2 & \cdots & {x_k}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_0}^n & {x_1}^n & \cdots & {x_k}^n \end{bmatrix}$$

と置く．X のサイズを述べよ．

3) $i \neq j$ ならば $x_i \neq x_j$ が成り立つとし，X を 2) のように定める．

i) $k \leq n$ ならば $\mathrm{rank}\, X = k+1$ が成り立つことを示せ．また，$k > n$ ならば $\mathrm{rank}\, X = n+1$ が成り立つことを示せ．

※ 一般に $M_{m,n}(K)$ の元 A について $\mathrm{rank}\, A \leq \min\{m, n\}$ が成り立つ．等号が成り立つとき，A は**フルランク**であると呼ばれる．これに従えば，この問は「X はフルランクであることを示せ」と書き換えられる．

ii) 式 $(*)$ を（$x_0, \dots, x_k, y_0, \dots, y_k$ が与えられているので）$a_0, \dots, a_n$ に関する方程式とみなす．このとき，

a) $k \leq n$ ならば方程式 $(*)$ は解を持つことを示せ．

b) $k \geq n$ ならば方程式 $(*)$ の解は高々一つであることを示せ．

c) $k = n$ ならば方程式 $(*)$ は解を一意的に持つことを示せ．また，解を $x_0, \dots, x_n$, $y_0, \dots, y_n$ を用いて具体的に表せ．

d) $\varphi\colon K_n[x] \to K^{k+1}$ を

$$\varphi(f) = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_k) \end{bmatrix}$$

により定める．

A) $\{1, x, \dots, x^n\}$ は $K_n[x]$ の基底であることを示せ．

B) $K_n[x]$ の（順序付き）基底 $\mathscr{V}$ を $\mathscr{V} = (1, x, \dots, x^n)$ により定める．また，K^{k+1} の標準的な（順序付き）基底を $\mathscr{E}$ とする．すると，φ の $(\mathscr{V}, \mathscr{E})$ に関する表現行列は ${}^tX$ に等しいことを示せ．

※ X に転置が付いているのはベクトルを縦に表すか横に表すかの問題である．ここでは本質的ではない（一方，例えば双対空間を考える場合など，転置を取るかどうかが本質的な場合もある）．

C) φ が単射であるための k に関する必要十分条件，および，φ が全射であるための k に関する必要十分条件をそれぞれ求めよ．

（以上）