２０１９年度線型代数学演習（理 I 6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題 7 v9　'19/10/8（火）
'19/9/27 :（v1）初版作成．追って問を加える．
'19/9/27 :（v2）問 7.1 を削除．問 7.2 から 7.4 については番号を繰り上げた上で改めて問 7.4 を追加．
'19/10/6 :（v3）問 7.8 を修正．問 7.9 以降を追加
'19/10/6 :（v4）問 7.10 の 1) を削除．問 7.16 以降を追加
'19/10/8 :（v5）問 7.6 の 2) の誤植を修正．問 7.15 を修正．問 7.19 を追加．
'19/10/29 :（v6）問 7.6 の 2) を修正．問 7.3 および問 7.14 の 3) の誤植を修正．
※ 問 7.6 の修正は学生の指摘による．
'19/11/13 :（v7）問 7.9 の記号が良くなかったので修正．
'19/12/3 :（v8）問 7.12 の誤植を修正．また，6) のヒントが不適切だったので修正．問 7.16 の誤植を修正．
'19/12/10 :（v9）問 7.8 の誤植を修正．問 7.12 の 6) のヒントを再修正．問 7.16 の記号が良くなかったので修正．

以下では $K=\mathbb{R}$ あるいは $K=\mathbb{C}$ とする．また，V を線型空間とし，$K=\mathbb{R}$ の場合には $\langle \cdot \mid \cdot, \rangle$ をユークリッド計量，$K=\mathbb{C}$ の場合には $\langle \cdot \mid \cdot, \rangle$ をエルミート計量とする．

問 7.1.　1) $A \in \mathrm{O}_n$ とする．このとき，A は正則であって，$A^{-1} = {}^tA$ が成り立つことを示せ．
2) $A \in \mathrm{U}_n$ とする．このとき，A は正則であって，$A^{-1} = A^*$ が成り立つことを示せ．

問 7.2. G を O_n, SO_n, U_n, SU_n のいずれかとする．$A, B \in G$ ならば $AB \in G$，$A^{-1} \in G$ が成り立つことを示せ．また，$E_n \in G$ が成り立つことを示せ．

問 7.3. $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ を V の基底（o.n.b. とは限らない）とし，P を $\mathscr{V}$ から $\mathscr{W}$ への変換行列とする．G, G' を $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ のそれぞれ $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ に関する表現行列とすると，ユークリッド計量に関しては $G' = {}^tPGP$ が，エルミート計量に関しては $G' = P^*GP$ が成り立つことを示せ．

問 7.4. $\mathscr{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ を o.n.b. とし，$P \in \mathrm{O}_n$（$K=\mathbb{R}$ の場合）あるいは $P \in \mathrm{U}_n$（$K=\mathbb{C}$ の場合）とする．このとき，$\mathscr{W} = \mathscr{V}P$ とすると，$\mathscr{W}$ は o.n.b. であることを示せ．ここで，$\mathscr{W} = (w_1, \ldots, w_n)$ とするとき，$w_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i$ である．

問 7.5. 以下が成り立つことを示せ．

1) $V=\mathbb{R}^2$ とする．$v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, $w=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in V$ について

$$\langle v \mid w \rangle = (v_1+v_2)(w_1+w_2)+v_2w_2$$

と定めると $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は V のユークリッド内積である．

2) $G \in M_n(K)$ とする．G は対角行列であって，対角成分はいずれも正の実数とする．このとき，$v=[v_i]$, $w=[w_i] \in K^n$ について

$$\langle v \mid w \rangle = v^* G w$$

とすると，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は $K=\mathbb{R}$ の場合にはユークリッド計量，$K=\mathbb{C}$ の場合にはエルミート計量である．

3) $V=\{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f$ は連続$\}$ とする．$f,g \in V$ について

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

とすると，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は V の内積である．

※ レポート問題と似ているが，同一ではないので注意すること．

4) $V=\{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f$ は C^1 級$\}$ とする．$f,g \in V$ について

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx + \int_{-1}^{1} Df(x)Dg(x)dx$$

とすると，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は V の内積である．

問 7.6 **. $V=\{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f$ は C^1 級$\}$ とする．$f,g \in V$ について

$$\langle f \mid g \rangle_0 = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$
$$\langle f \mid g \rangle_1 = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx + \int_{-1}^{1} Df(x)Dg(x)dx$$

とすると，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_0$，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle_1$ はいずれも V の内積である（このことは認めて良い）．

1) $f \in V$ について，$\|f\|_0 = \sqrt{\langle f \mid f \rangle_0}$，$\|f\|_1 = \sqrt{\langle f \mid f \rangle_1}$ とする．このとき，
   i) $\|f\|_0 \leq \|f\|_1$ が成り立つことを示せ．
   ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を V の点列（函数列）とすると，$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_1 = 0$ ならば $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_0 = 0$ が成り立つことを示せ．
   iii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を V の点列（函数列）とする．$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_0 = 0$ であるが，$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_1 \neq 0$ であるような例を一つ挙げよ（必ずしも $\|f_n\|_1$ が $n \to +\infty$ で収束している必要はない）．

2) i) V の点列（函数列）$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_0 = 0$ であるが，$\exists x \in [-1,1]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \neq 0$ が成り立つような例を一つ挙げよ．

ii) V の点列（函数列）$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\lim_{n\to+\infty}\|f_n\|_1=0$ を満たすならば $\forall x\in[-1,1],\ f(x)=0$ が成り立つことを示せ．

定義 7.7. $W\subset V$ を部分線型空間とする．$\{w_1,\dots,w_r\}$ を W の o.n.b. とするとき，$\pi_W\colon V\to W$ を

$$\pi_W(v)=\sum_{k=1}^{r}\langle w_k\mid v\rangle w_k$$

により定め，$\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ に関する W への**直交射影**あるいは**正射影**と呼ぶ．

問 7.8. $W\subset V$ を部分線型空間とし，π_W を W への直交射影とする．

1) $W=V$ ならば，$\pi_W=\mathrm{id}_V$ が成り立つことを示せ．
2) π_W は W の o.n.b. の選び方に依らないことを以下に従って示せ（発表する場合には全て解くこと）．$\mathscr{W}=(w_1,\dots,w_r)$ を W の（順序付き）o.n.b. とし，π_W は $\mathscr{W}$ を用いて定めるとする．一方，$\mathscr{W}'=(w_1',\dots,w_r')$ も W の（順序付き）o.n.b. とし，P を $\mathscr{W}$ から $\mathscr{W}'$ への基底の変換行列とする．最後に，$\pi_W'\colon V\to W$ を $\pi_W'(v)=\sum_{k=1}^{r}\langle w_k'\mid v\rangle w_k'$ により定める．
   i) $P=[p_{ij}]$ とする．$\langle w_j'\mid v\rangle=\sum_{i=1}^{n}\overline{p_{ij}}\langle w_i\mid v\rangle$ が成り立つことを示せ．また，

$$\begin{bmatrix}\langle w_1'\mid v\rangle\\ \vdots\\ \langle w_n'\mid v\rangle\end{bmatrix}=P^*\begin{bmatrix}\langle w_1\mid v\rangle\\ \vdots\\ \langle w_n\mid v\rangle\end{bmatrix}$$

   が成り立つことを示せ．
   ii) $\pi_W'=\pi_W$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：$\mathscr{W}'=\mathscr{W}P$ が成り立つ．

問 7.9. $\mathbb{R}^3$ に標準的なユークリッド計量を入れる．$u_1,u_2,u_3\in\mathbb{R}^3$ をそれぞれ $u=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\4\\5\end{bmatrix}$ により定める．

1) $\{u_1,u_2,u_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．
2) i) $v_1=u_1,\ v_2=u_2,\ v_3=u_3$ として，グラム–シュミットの方法により正規直交基底を求めよ．
   ii) $v_1=u_3,\ v_2=u_2,\ v_3=u_1$ として，グラム–シュミットの方法により正規直交基底を求めよ．
   ※ 両方解くこと．

問 7.10. $A = [a_1\ \cdots\ a_n] \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．$\{q_1, \dots, q_n\}$ を $\{a_1, \dots, a_n\}$ にグラム–シュミットの方法を適用して得られる K^n の正規直交基底とし，$Q = [q_1\ \cdots\ q_n]$ と置く．$A = QR$ が成り立つように $R \in M_n(K)$ を定めると，R は上三角行列かつ対角成分が正の実数であることを示せ．
※ $A = QR$ と表すことを QR 分解と呼ぶ．QR 分解については続く問も参照のこと．

問 7.11.

1) A, B を上三角行列とする．このとき，AB は上三角行列であることを示せ．また，A が正則ならば A^{-1} も上三角行列であることを示せ．
2) $A \in \mathrm{U}_n$ とする．また，A は上三角行列であって，対角成分は全て正の実数だとする．このとき，$A = E_n$ が成り立つことを示せ．
3) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．$Q \in \mathrm{O}_n$（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいは $Q \in \mathrm{U}_n$（$K = \mathbb{C}$ の場合）と，上三角行列 $R \in M_n(K)$ であって，対角成分が正の実数であるものがそれぞれ一意的に存在して $A = QR$ が成り立つことを示せ．このように，$A \in \mathrm{GL}_n(K)$ を $A = QR$ の形に表すことを **QR 分解**と呼ぶ．
ヒント：$A = QR = Q'R'$ と二通りに分解されたとする．$(Q')^{-1}Q = R'R^{-1}$ が成り立つ．すると，左辺は U_n（あるいは O_n）の元であって，右辺は上三角行列である．

問 7.12 * **(正則とは限らない行列についての QR 分解に相当するもの).**
$A = [a_1\ \cdots\ a_n] \in M_n(K)$ とする（従って必ずしも正則ではない）．

1) $a_0 = o$（零ベクトル）とし，$V_i = \mathrm{Span}\{a_0, a_1, \dots, a_i\}$ とする．このとき，$i \in \mathbb{N},\ i \geq 1$ について $\dim V_{i-1} = \dim V_i$ あるいは $\dim V_{i-1} + 1 = \dim V_i$ が成り立つことを示せ．
2) 1) において $\dim V_{i-1} + 1 = \dim V_i$ が成り立つような i を $i_1, \dots, i_r$ とする．ただし，このような i が存在しなければ $r = 0$ とする．すると，$r = \operatorname{rank} A$ が成り立つことを示せ．
3) 2) のように $i_1, \dots, i_r$ を定め，$b_k = a_{i_k}$ とする．$r < n$ ならば $b_{r+1}, \dots, b_n \in K^n$ であって，$\{b_1, \dots, b_n\}$ は K^n の基底であるようなものが存在することを示せ．
※ 講義で示した定理を用いて良い．定理を用いずに示すことももちろん可能であるが，それなりに大変である．
4) 3) のように $b_1, \dots, b_n$ を定め，$B = [b_1\ \cdots\ b_n]$ とする．このとき，上三角行列であって，対角成分がいずれも非負であるようなもの S が存在して $A = BS$ が成り立つことを示せ．また，S の対角成分がいずれも正であることは A が正則であることと同値であることを示せ．
5) $B = QR$ と QR 分解する．このとき，$A = QRS$ が成り立つが，RS は上三角行列であって，対角成分はいずれも非負であることを示せ．従って，$A = Q(RS)$ と QR 分解に類似した分解ができる．

6) A は正則でないとする．$A = QR$，ただし $Q \in \mathrm{O}_n$（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいは $Q \in \mathrm{U}_n$（$K = \mathbb{C}$ の場合），R は上三角行列であって，対角成分はいずれも非負である，と表す方法は一意的ではあり得ないことを示せ．

ヒント：Q は正則なので，R は正則ではない．特に，$1 \leq j \leq n$ が存在して，R の j 番目以降の対角成分は 0 に等しい．そこで，T を R の第 j 行を -1 倍することに対応する基本行列（以前の記号を用いるならば $P(j;-1)$）とする．このとき，$A = (QT)(TR)$ が成り立つが，これは A の「QR 分解に相当するもの」を与えている（確かめること）．

問 7.13. $A \in \mathrm{U}_n$ とする．$A \in M_n(\mathbb{R})$ ならば $A \in \mathrm{O}_n$ が成り立つことを示せ．また，$B \in \mathrm{O}_n$ ならば（$B \in M_n(\mathbb{R})$ であって）$B \in \mathrm{U}_n$ が成り立つことを示せ．従って $\mathrm{O}_n = \mathrm{U}_n \cap M_n(\mathbb{R})$ が成り立つ（このことも示すこと）．

問 7.14 ****.** $V = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; a_n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}$ と置く．また，$a = (a_n),\ b = (b_n) \in V$ について

$$\|a\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2},$$
$$\langle a \mid b \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} b_n$$

と置く．$\|a\| = \sqrt{\langle a \mid a \rangle}$ が成り立つ．

1) V は線型空間であることを示せ．
2) $a = (a_n) \in V$ とする．このとき，$b = (|a_n|)$ とすると $b \in V$ が成り立つことを示せ．
3) $a = (a_n),\ b = (b_n) \in V$ とする．このとき，任意の $N \in \mathbb{N}$ について
$$\sum_{n=0}^{N} |a_n|\,|b_n| \leq \|a\|\,\|b\|$$
が成り立つことを示せ．

ヒント：$a' = {}^t[a_0\ \cdots\ a_N],\ b' = {}^t[b_0\ \cdots\ b_N] \in \mathbb{C}^{N+1}$ にコーシー・シュワルツの不等式を用いると $\|a'\|\,\|b'\|$ による評価が得られる．これと $\|a\|\,\|b\|$ を比較してみよ．

4) 任意の $a, b \in V$ について，$\langle a \mid b \rangle$ は絶対収束することを示せ．また，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は V の内積を定めることを示せ．

※ 絶対収束については微分積分学で級数に関連して扱う．定義を調べて解答しても良いし，講義をまっても良い．

この V は ℓ^2 空間と呼ばれ，内積を持つ無限次元の線型空間（Hilbert 空間）の基本的なものの一つである．

問 7.19 ****.** $f, g \in K[x]$ について，$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ と表し，

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} \overline{f(x)} g(x) dx$$

と置く．レポート問題と同様に，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は $K[x]$ の内積を定める．また，

$$\langle f \mid g \rangle' = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} b_n$$

と定める．

1) $\langle \cdot \mid \cdot \rangle'$ を定める式は実際には有限和であることを示せ．
2) $\langle \cdot \mid \cdot \rangle'$ は内積（$K = \mathbb{R}$ ならばユークリッド内積，$K = \mathbb{C}$ ならばエルミート内積）であることを示せ．
3) $\varphi \colon K[x] \to K[x]$ を $f \in K[x]$ を $\varphi(f)(x) = f(x^2)$ により定める．
   i) φ は $\langle \cdot \mid \cdot \rangle'$ に関して等長写像（計量を保つ写像）であることを示せ．
   ii) φ は単射であるが，線型同型写像ではないことを示せ．
4) $f \in K[x]$ について $\|f\| = \sqrt{\langle f \mid f \rangle}$，$\|f\|' = \sqrt{\langle f \mid f \rangle'}$ と置く．$f_k(x) = x^k$ とすると，$\lim_{k \to +\infty} \|f_k\|' \neq 0$ が成り立つが，一方，$\lim_{k \to +\infty} \|f_k\| = 0$ が成り立つことを示せ．
   ※ これは $K[x]$ においてはどのような函数列が 0 に収束するかが内積により異なることを意味している．このようなことは有限次元の線型空間では起きないことが知られている．証明は難しくないがここでは割愛する．

問 7.15. $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)_V)$，$(W, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)_W)$ をそれぞれ計量線型空間とする．また，$f \colon V \to W$ は計量を保つ線型写像とする．

1) f は単射であることを示せ．
   ヒント：$o_W \in W$ を零ベクトルする．$f(v) = o_W$ ならば $\langle f(v) \mid f(v) \rangle = 0$ が成り立つが，左辺は $\langle v \mid v \rangle$ に等しい．
2) $\dim V = \dim W < +\infty$ とする（V と W の次元いずれも有限であって，等しいとする）．この時 f は線型同型写像であることを示せ．

3**) $\dim V = \dim W$ は有限次元でなく，f は線型同型写像でないような例を一つ挙げよ．
   ヒント：例えば問 7.14 の V を（W も V として）用いたり，あるいは問 7.19 の $K[x]$ を V, W として用いることができる．

問 7.16. $\mathbb{R}^2$ に標準的なユークリッド内積（ユークリッド計量）を入れる．$\theta \in \mathbb{R}$ とし，$I_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$ とする．また，$\mathbb{R}^2$ の線型変換 g を $g(v) = I_\theta v$ により定める．

1) g は等長変換であることを示せ．

2) $I_\theta \in \mathrm{O}_2$ であるが，$I_\theta \notin \mathrm{SO}_2$ が成り立つことを示せ．

3) $t \in \mathbb{R}$ とする．$p = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} t,\ q = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} t$, として $g(p),\ g(q)$ を求めよ．また，$P = [p\ q]$ とすると $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ であることを示し，更に $P^{-1} I_\theta P$ を求めよ．

4) $\mathbb{R}^2$ の線型変換 $\varphi,\ h$ をそれぞれ $\varphi(v) = Pv$，$h(v) = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi(v)$ により定める．φ, h, g がどのような線型変換であるか述べよ．

問 7.17 (全て解くこと). V を線型空間とし，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を V の内積とする．

1) f, g が V の等長変換ならば $g \circ f$ も V の等長変換であることを示せ．

2) f は V の等長変換であって，正則（可逆）とする．このとき，f^{-1} も V の等長変換であることを示せ．

3) V の恒等変換 id_V は V の等長変換であることを示せ．

問 7.18. f を $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ の線型変換とする．このとき，以下は同値である．

i) f は等長変換である．

ii) V のある正規直交基底に関する f の表現行列は直交行列（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいはユニタリ行列（$K = \mathbb{C}$ の場合）である．

iii) V の任意の正規直交基底に関する f の表現行列は直交行列（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいはユニタリ行列（$K = \mathbb{C}$ の場合）である．

特に，等長変換は正則（可逆）である．

このことを以下に従って示せ．

1) f を等長変換とする．$\{v_1, \ldots, v_n\}$ を V の o.n.b. とすると，$\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ は V の o.n.b. であることを示せ．また，このことを用いて i)⇒ii) が成り立つことを示せ．

2) 正規直交基底の間の基底の変換行列は直交行列（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいはユニタリ行列（$K = \mathbb{C}$ の場合）であることに注意して，ii)⇒iii) が成り立つことを示せ．
※ iii)⇒ii) が成り立つことは自明なので，ii) と iii) は同値であることが分かる．

3) ii)⇒i) が成り立つことを示せ．

（以上）