２０１９年度線型代数学演習（理 I 6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題 6 v2　’19/9/24（火）
’19/9/18：（v1）初版作成
’19/9/24：（v2）問 6.1 と 6.4 の 3) を修正
問題については S セメスターからの通番とする．

以下では $K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とする．

問 6.1. $X \in M_n(K)$ とする．$a_0, \dots, a_{n^2} \in K$ であって，いずれかは 0 ではないものが存在して

$$a_0 E_n + a_1 X + \cdots + a_{n^2} X^{n^2} = O_n$$

が成り立つことを示せ．
※ 実際には $a_{n+1} = \cdots = a_{n^2} = 0$ とすることができる（Cayley-Hamilton の定理）．これについては後日扱う．

定義 6.2. $A \in M_n(K)$ とする．

1) $\exists k \geq 1,\ A^k = O_n$ が成り立つとき，A は**冪零**であるという．
2) $\exists k \geq 1,\ A^k = E_n$ が成り立つとき，A は**冪単**であるという．
3) $\exists k \geq 2,\ A^k = A$ が成り立つとき，A は**冪等**であるという．特に $A^2 = A$ が成り立つとき，A を**射影行列**と呼ぶ．

問 6.3. $A \in M_n(K)$ とする．

1) A が冪零ならば，A は正則ではないことを示せ．
2) A が冪単ならば，A は正則であることを示せ．
3) A が冪単ならば，A は冪等であることを示せ．
4) A は冪等とする．$A^n = A$ ならば，$\det A = 0$ が成り立つか，あるいは $\det A$ は 1 の $n-1$ 乗根であることを示せ．
   ※ 前者の場合には A は正則でないし，後者の場合には A は正則である．

問 6.4.　1) $A \in M_2(\mathbb{R})$ であって，$A \neq O_2$，$A^2 = O_2$ を満たすものを一つ挙げよ．

2) $A \in M_2(\mathbb{R})$ であって，$A \neq E_2$，$A^2 = E_2$ を満たすものを一つ挙げよ．
3) $A \in M_2(\mathbb{R})$ であって，$A^2 = A$ を満たすとする．
   i) $A \neq O_2$ であって，かつ正則でないものを一つ挙げよ．
   ii) A が正則ならば $A = E_2$ が成り立つことを示せ．

射影行列は**射影**と呼ばれる特別な線型変換に対応する．

定義 6.5. V を線型空間とする．V の線型変換 p が**射影**であるとは，$p^2 = p \circ p = p$ が成り立つ（最初の等号は定義である）ことを言う．

問 6.6. V を線型空間，f を V の線型変換とする．

1) V のある基底に関する f の表現行列が射影行列であることと，f が射影であることは同値であることを示せ．
2) V の任意の基底に関する f の表現行列が射影行列であることと，f が射影であることは同値であることを示せ．

問 6.7. V を線型空間，p を射影とし，$q = \mathrm{id}_V - p$ と置く．
※ 直和については，問 5.15 やその後の注釈も参照のこと．

1) q は射影であることを示せ．
2) $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\, q$ および $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\, q$ が成り立つことを示せ．
3) $V = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, q$ が成り立つことを示せ．
   ※ ヒント：$v \in V$ とすると，$v = p(v) + q(v)$ が成り立つ．

問 6.8. $A \in M_n(K)$ を冪零とする．このとき，$E_n - A$ は正則であることを示せ．また，$(E_n - A)^{-1}$ を A を用いて表せ．

問 6.9. $A \in M_n(K)$ を冪零とし，$A^{k-1} \neq O_n$，$A^k = O_n$ とする．$f_i \colon K^n \to K^n$ を $f_i(v) = A^i v$ により定める．$i \geq k$ ならば f_i は零写像である．また，$A^0 = E_n$，$f_0 = \mathrm{id}_{K^n}$ と定める．

1) $V_i = \mathrm{Im}\, f_i$ とする．このとき，$K^n = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_{k-1} \supsetneq V_k = \{o\}$ が成り立つことを示せ．ここで $o \in K^n$ は零ベクトルである．

さて，$\mathscr{V}_1 = \{v_1, \ldots, v_{j_1}\}$ を V_{k-1} の基底とする．$V_{k-2} \supsetneq V_{k-1}$ ならば，$\mathscr{V}_1$ を拡大して V_{k-2} の基底を得ることができる．これを $\mathscr{V}_2 = \{v_1, \ldots, v_{j_1}, \ldots, v_{j_2}\}$ とする．$V_{k-2} = V_{k-1}$ ならば，$j_2 = j_1$ として，$\mathscr{V}_2 = \mathscr{V}_1$ とする．これを繰り返して得られる $K^n = V_0$ の基底を $\mathscr{V}_n = \{v_1, \ldots, v_{j_k}\}$ とする．

2) $j_k = n$ が成り立つことを示せ．
3) $A^n = O_n$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：$V_j \supsetneq V_{j+1}$ が成り立つような j が幾つ存在するか考えてみよ．
4) $P = [v_1 \ \cdots \ v_n]$ とすると，$P^{-1}AP$ は上三角行列であることを示せ．また，$P^{-1}AP$ は $\mathscr{V}_n$ に関する f_1 の表現行列であることを示せ．
5) $n = 4$ とする．A をそれぞれ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ として上の作業を実行せよ．

$N(m) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \in M_m(K)$ とする．問 6.9 の議論をもう少し精密に行うと，P を $P^{-1}AP = N(m_1) \oplus N(m_2) \oplus \cdots \oplus N(m_p)$，ただし $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$，が成り立つように定めることができることが分かる（Jordan 標準形の一番基本的な場合）．ここで，正方行列 $A_1, \ldots, A_p$ について $A_1 \oplus \cdots \oplus A_p = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_p \end{bmatrix}$ と定め，$A_1, \ldots, A_p$ の**直和**と呼ぶ．

（以上）