２０１９年度数学基礎理論演習（理Ｉ6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題 5 v92019/7/2（火）

'19/6/21：(v1) 暫定的に作問．講義の進捗によっては追って問を加える．

'19/6/21：(v2) 問を追加．問題番号が変わっているので注意すること．

'19/6/22：(v3) 問 5.3 のヒントを修正．更に問を追加．再び問題番号が変わっているので注意すること．

'19/6/23：(v4) 節を少し分けた．内容には変更はない．

'19/6/25：(v5) 問に重複などがあったので整理．番号を変更．発表の際には注意すること．

'19/6/25：(v6) 問 5.15 の 6)，問 5.29 を追加．

'19/6/27：(v7) 直和に関するコメント（二箇所）を修正．問 5.30 を追加．

'19/7/2：(v8) 細かい誤植の修正．数学（数学書）における言葉遣いについてのコメントを追加．A セメスターの「線型代数学演習」において発表する場合には第 5 回以降の問題を用いること．

'19/7/8：(v9) 問 5.4 1)b) の誤植の修正．

いくつかの表現について

初見ではわかりにくいかも知れないと思われる表現について，幾つか述べておく．いずれも数学書では一般的なものである．

【適当】「適切」という意味である．日常的には「いい加減に」というニュアンスが強いが，ここではそれはあたらない．例：$f\colon X \to Y$ は全射だとする．$y \in Y$ について，$y = f(x)$ が成り立つような $x \in X$ を適当に取る．

【〜なる】やや古い「〜なり」という表現の活用形である．状況により言い換えは幾つかあるが,「〜であるような」「〜が成り立つような」というのが一般的である．例：$y \in Y$ について，$y = f(x)$ なる $x \in X$ を適当に取る．

【一意的】一つしかないということである．ただし，存在についてはなんら保証しない．存在することまで保証したければ「一意的に存在する」「存在して一意的である」「唯一存在する」などの表現を用いる．例：$x \in \mathbb{R}$ とすると $y \in \mathbb{R}$ であって，$x + y = 0$ が成り立つものが一意的に存在する．例２：$\sqrt{-1} + x = 0$ が成り立つような $x \in \mathbb{R}$ は一意的である．
より丁寧に述べれば「$\sqrt{-1} + x = 0$ が成り立つような $x \in \mathbb{R}$ は存在すれば一意的である.」となる．もちろんこのような x は実際には存在しない．

【自明】→ 明らか

【明らか】証明は書けなくはないが，面倒で書きたくないなどの場合に用いられる，多くの場合（仮に教科書に書かれていても）不適切な表現である．これを書かれてしまうとしばしば読

者は議論を追えなくなる．また，実際の所書いている本人もきちんと証明が付けられないことも少なくない[†1]．なお，試験に於いては注意事項にもあるように，これらの表現を不適切に用いていると考えられる場合には大きな減点を行う[†2].

線型空間の基底

問 5.1. V, W を線型空間，$f\colon V \to W$ を線型写像とする．

1) $v_1, \ldots, v_r \in V$ とする．$f(v_1), \ldots, f(v_r) \in W$ が線型独立ならば $v_1, \ldots, v_r$ も線型独立であることを示せ．
2) $f(v_1), \ldots, f(v_r) \in W$ が W を生成するとしても，$v_1, \ldots, v_r$ は必ずしも V を生成しないことを示せ．

問 5.2. V, W を線型空間，$f\colon V \to W$ を線型写像とする．

1) f は単射とする．$v_1, \ldots, v_r \in V$ が線型独立ならば $f(v_1), \ldots, f(v_r) \in W$ も線型独立であることを示せ．
2) f は全射とする．$v_1, \ldots, v_r \in V$ が V を生成するならば $f(v_1), \ldots, f(v_r) \in W$ は W を生成することを示せ．
3) f は線型同型写像とする．$\{v_1, \ldots, v_r\}$ が V の基底であるならば $\{f(v_1), \ldots, f(v_r)\}$ は W の基底であることを示せ．特に $\dim V = \dim W$ が成り立つ．

問 5.3.

1) V, W を線型空間とし，線型同型写像 $f\colon V \to W$ が存在するとする．V あるいは W が n 次元ならば，もう一方も n 次元であることを示せ．
2) V, W を線型空間とし，$\dim V = \dim W = n$ が成り立つとする．このとき，V と W は線型同型であることを示せ．即ち，V から W への線型同型写像が存在することを示せ．
   ヒント：V も W も K^n と線型同型である．

※ 無限次元の場合にも同様のことが成り立つが，現時点では難しい．また，1) は問 5.2 とほぼ同一である．

問 5.4 (1)，2) については発表の際には全体を解くこと)．$v_1, \ldots, v_k \in K^n$ とする．

1) $v_1, \ldots, v_k$ が線型独立であることと $\operatorname{rank}[v_1 \ \cdots \ v_k] = k$ が成り立つことは同値である．特に $v_1, \ldots, v_k$ が線型独立ならば $k \leq n$ が成り立つ．このことを以下に従って示せ．

[†1] きちんとした教科書ではそんなことはない．

[†2] 本当に自明あるいは明らかなことも確かにあるので，これを適切に判断することは実はかなり難しい．例えば通常は $1+1=2$ が成り立つことは自明であるが,「1」や「2」，また，これらに関する演算を定義しようとしている場面では $1+1=2$ が成り立つことは全く自明ではない．学習を進める際にはこのようなことについてまで心配することはないが，なにか「仕掛け」（議論）が必要な事柄については基本的には「自明」と片付けてはいけないと考えるべきである．試験についても同様である．線引きについては一定程度は演習で示している．

a) $\mathrm{rank}[v_1 \ \cdots v_k] < k$ とする．このとき，$\lambda \in K^k$ に関する方程式 $[v_1 \ \cdots v_k]\lambda = 0$ は o（零ベクトル）以外の解を持つことを示せ．また，$v_1, \ldots, v_k$ は線型従属であることを示せ．

b) $\mathrm{rank}[v_1 \ \cdots v_k] = k$ とする．このとき，$\lambda \in K^k$ に関する方程式 $[v_1 \ \cdots v_k]\lambda = 0$ の解は o（零ベクトル）のみであることを示せ．また，$v_1, \ldots, v_k$ は線型独立であることを示せ．

c) $v_1, \ldots, v_k$ が線型独立ならば $k \leq n$ が成り立つことを示せ．

2) $v_1, \ldots, v_k$ が K^n を生成することと，$\mathrm{rank}[v_1 \ \cdots \ v_k] = n$ が成り立つことは同値である．特に，$k \geq n$ が成り立つ．このことを以下に従って示せ．

a') $\mathrm{rank}[v_1 \ \cdots v_k] < n$ とする．

i) $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ を $P[v_1 \ \cdots \ v_k]$ が行階段行列[†3]であるように定める．すると $P[v_1 \ \cdots \ v_k]$ の第 n 行は 0 に等しいことを示せ．また，$[w_1 \ \cdots \ w_k] = P[v_1 \ \cdots \ v_k]$ とすると，e_n は $w_1, \ldots, w_k$ の線型結合として表すことはできないことを示せ．

ii) $P^{-1} = [q_1 \ \cdots \ q_n]$ とする．もし q_n が $v_1, \ldots, v_k$ の線型結合として表されると矛盾を生じることを示せ．

ヒント：Pq_n は具体的に求まる．

iii) $v_1, \ldots, v_k$ は K^n を生成しないことを示せ．

b') $\mathrm{rank}[v_1 \ \cdots \ v_k] \geq n$ とする．

i') $\mathrm{rank}[v_1 \ \cdots \ v_k] = n$ が成り立つことを示せ．

ii') 任意の $v \in K^n$ について，$\lambda \in K^k$ に関する方程式 $[v_1 \ \cdots \ v_k]\lambda = v$ は解を持つことを示せ．

iii') $v_1, \ldots, v_k$ は K^n を生成することを示せ．

3) （(2) の a') の言い換え）

「ある $v \in K^n$ について，$\lambda \in K^k$ に関する方程式 $[v_1 \ \cdots \ v_k]\lambda = v$ は解を持たない」ことと $v_1, \ldots, v_k$ が K^n を生成しないことは同値であることを示せ．また，前者の条件は $\mathrm{rank}[v_1 \ \cdots \ v_k] < n$ が成り立つことと同値であることを示せ．

問 5.5. $v_1, \ldots, v_{k+1} \in K^n$ とする．このとき，

$$\mathrm{rank}[v_1 \ \cdots \ v_{k+1}] = \begin{cases} \mathrm{rank}[v_1 \ \cdots \ v_k], & v_{k+1} \in \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}, \\ \mathrm{rank}[v_1 \ \cdots \ v_k] + 1, & v_{k+1} \notin \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\} \end{cases}$$

が成り立つことを示せ．

問 5.6 (問 5.4 も参照のこと)**.** $u_1, \ldots, u_r \in K^n$ とし，これらは K^n を生成するとする．

[†3] 正確には既約行階段行列である．以下同様．

1) $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_n \le r$ が存在して，$[u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}]$ は正則であることを示せ．また，このとき $\{u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}\}$ は K^n の基底であることを示せ（後半は講義で示した定理や命題などを適宜用いて良い）．

ヒント：$P \in \mathrm{GL}_n(K)$ を $P[u_1 \ \cdots u_r]$ が行階段行列であるように定める．$\mathrm{rank}[u_1 \ \cdots \ u_r] = n$ なので，$P[u_1 \ \cdots \ u_r] = [\cdots \ e_1 \ \cdots \ e_2 \ \cdots \ e_n \cdots]$ の形をしている．e_i は第 j_i 列だとして，$u_{j_1}, \ldots, u_{j_n}$ を考えてみよ．

2) $v_1, \ldots, v_k \in K^n$ とし，これらは線型独立とする．問 5.4 により $\mathrm{rank}[v_1 \ \cdots \ v_k] = k$ が成り立つ．

a) $k = n$ ならば $\{v_1, \ldots, v_n\}$ は K^n の基底であることを示せ．

a) を踏まえて，以下では $k < n$ とする．

b) ある i_1，$1 \le i_1 \le r$ が存在して

$$\mathrm{rank}[v_1 \ \cdots \ v_k \ u_i] = \begin{cases} k, & i < i_1, \\ k+1, & i = i_1 \end{cases}$$

が成り立つことを示せ．

c) ある $i_1, \ldots, i_{n-k}$，$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-k} \le r$ が存在して $\{v_1, \ldots, v_k, u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n-k}}\}$ は K^n の基底であることを示せ．

b), c) のヒント：問 5.5 を用いる．b) はほぼ直接的に従う．c) に関しては，

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}[v_1 \ \cdots \ v_k] &\le \mathrm{rank}[v_1 \ \cdots \ v_k \ u_1] \\ &\le \mathrm{rank}[v_1 \ \cdots \ v_k \ u_1 \ u_2] \\ &\le \cdots \\ &\le \mathrm{rank}[v_1 \ \cdots \ v_k \ u_1 \ \cdots \ u_r]\end{aligned}$$

が成り立つことを示す．今の場合には一番左の項は k に，一番右（実際には下）の項は n に等しい．

問 5.7. $v_1, \ldots, v_k \in K^n$ とし，これらは線型独立だとする．このとき，$[v_1 \ \cdots \ v_k] \in M_{n,k}(K)$ を既約行階段行列に変形すると $\begin{bmatrix} E_k \\ O_{n-k,k} \end{bmatrix}$ が得られることを示せ．
ヒント：問 5.4 により，$\mathrm{rank}[v_1 \ \cdots \ v_k] = k$ が成り立つ．このことを踏まえて講義の定理 2.6.11 や補題 2.6.13 と同様に考えれば良い．

問 5.8. K^n の部分線型空間 V を以下のように定める．V の基底と，その拡大（延長）であるような K^n の基底をそれぞれ一組ずつ求めよ．

1) $V = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in K^n \;\middle|\; x_{n-1} = x_n = 0 \right\}$. ただし $n \geq 2$ とする．

2) $V = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in K^n \;\middle|\; x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \right\}$.

3) $V = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix} \in K^6 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \right\}$.

線型写像の表現行列

問 5.9. V, W を線型空間とする．また，$\dim V = n$，$\dim W = m$ とする．

1) $\mathrm{id}_V \colon V \to V$ を V の恒等変換とする．$\mathscr{V}$ を V の基底とすると，id_V の $\mathscr{V}$ に関する表現行列は $\mathscr{V}$ に依らず E_n に等しいことを示せ．
2) $f \colon V \to W$ を零写像とする．即ち，$v \in V$ について $f(v) = 0$ が成り立つとする．$\mathscr{V}$，$\mathscr{W}$ をそれぞれ V, W の基底とすると，f の $(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ に関する表現行列は $\mathscr{V}$, $\mathscr{W}$ に依らず $O_{m,n}$ に等しいことを示せ．

定義． $f \in K[x]$ とする．$f \neq 0$ の時，$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，$a_n \neq 0$ と表されるとき，f の**次数**を n と定める．f の次数は $\deg f$ で表すことが多い．$f = 0$ の時，f の次数は特別に定めることもあるが，次数は定めないことが多い（ありとあらゆる場合にうまく行くように $f = 0$ の次数を定めることはできないが，考える f の種類を制限するとうまく定めることができることがある．このような場合には $f = 0$ の次数も定めることが少なくない）．

問 5.10. $K_n[x] = \{f \in K[x] \mid \deg f \leq n \text{ または } f = 0\}$ と置く．また，$\varphi \colon K_n[x] \to K_n[x]$ を $\varphi(f)(x) = f(x+1)$ により定める．例えば $f(x) = x^2$ ならば $\varphi(f)(x) = (x+1)^2$ である．

1) $K_n[x]$ の基底を一組求めよ．
2) φ は線型写像であることを示せ．
3) 1) で求めた基底に関する φ の表現行列を求めよ．

問 5.11. $V = K^n$，$W = K^m$ とし，$\mathscr{V} = (e_1, \ldots, e_n)$，$\mathscr{W} = (e'_1, \ldots, e'_m)$ をそれぞれ V, W の標準的な基底とする．$f \colon V \to W$ を線型写像とすると，$(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ に関する f の表現行列は講義の定理 3.3.3 の意味での表現行列に等しいことを示せ．

問 5.12. $A \in M_{m,n}(K)$ とし，$f\colon K^n \to K^m$ を $f(v) = Av$ により定める．$\mathscr{V} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathscr{W} = (w_1, \ldots, w_m)$ をそれぞれ K^n, K^m の順序付き基底とする．$P = [v_1 \ \cdots \ v_n]$, $Q = [w_1 \ \cdots \ w_m]$ とすると，$(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ に関する f の表現行列は $Q^{-1}AP$ に等しいことを示せ．

問 5.13. $V = \mathbb{R}_{>0} = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$ とする．また，

i) $t, s \in V$ について $t \boxplus s = ts$ と定める（$\boxplus$ はここでの記号である）．

ii) $t \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$ について $\lambda \boxdot t = t^\lambda = e^{\lambda \log t}$ と定める（$\boxdot$ はここでの記号である．また，二番目の等号は定義である）．

このとき，以下の問に答えよ．

1) V は演算 $\boxplus$ を和，$\boxdot$ を積として $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ．
   ※ 難しくないが，大変面倒である．
2) V の零ベクトルを具体的に求めよ．また，$t \in V$ について，$-t$ を具体的に表せ．
   ※ 「$-t$」は定義により定まる t の逆元であって，数としての $-t$ という意味ではない．
3) $\{2\}$ は V の基底であることを示せ．
4) $W = \mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ を 1 次元実数ベクトル空間とする．
5) $\{1\}$（あるいは $\{[1]\}$）は W の基底であることを示せ．

6*) $f\colon V \to W$ を $f(t) = \log t$ により定める．
   a) f は線型写像であることを示せ．
      ※ もちろん $\log(x + y) = \log x + \log y$ は一般には成り立たず，この意味では $\log$ は線型写像ではない．
   b) V の基底 $\{2\}$，W の基底 $\{1\}$ に関する f の表現行列を求めよ．
   c) f は線型同型写像であることを示せ．また，逆写像を求め，それが線型写像であることを確かめよ．

問 5.14. V, W を線型空間，$f\colon V \to W$ を線型写像とする．次は同値であることを示せ．

1) f は線型同型写像である．
2) V のある基底 $\mathscr{V}$，W のある基底 $\mathscr{W}$ について，f の $(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ に関する表現行列は正則である．
3) V の任意の基底 $\mathscr{V}$，W の任意の基底 $\mathscr{W}$ について，f の $(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ に関する表現行列は正則である．

問 5.15. $C^\infty(\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ は C^∞ 級 $\}$ とし，函数の和と定数倍により線型空間の構造を入れる[†4]．また，

$$V = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid D^2 f - f = 0\},$$
$$W_+ = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid Df - f = 0\},$$
$$W_- = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid Df + f = 0\}$$

と定める．最後に，$\pi_\pm\colon V \to C^\infty(\mathbb{R})$ を $\pi_\pm(f) = \dfrac{f \pm Df}{2}$ により定める（複号同順）..
※ 微分方程式を解いて $V, W_\pm$ を具体的に決定しても良いが，必ずしもそうする必要はない．なお，微分方程式を解けば $V, W_\pm$ は有限次元であることが分かる．

1) V, W_+, W_- はいずれも $C^\infty(\mathbb{R})$ の部分線型空間であることを示せ．
2) $W_+, W_- \subset V$ が成り立つことを示せ．
3) $W_+ \cap W_- = \{o\}$ が成り立つことを示せ．
4) $\pi_\pm(f) \in W_\pm$ が成り立つことを示せ（複号同順）．
5) $V = W_+ + W_-$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：$f \in V$ について $\pi_\pm(f)$ を考えてみよ．
6) $f \in V$ とすると，$f = f_+ + f_-$，$f_\pm \in W_\pm$ と一意的に表されることを示せ．

問 5.15 のように，線型空間 V と，部分線型空間 $W, U \subset V$ について

$$W \cap U = \{o\},$$
$$V = W \oplus U$$

が成り立つとき，V は W と U の**直和**であるといい，$V = W \oplus U$ と表す（$V = W \dotplus U$ と表すこともあるが，あまり一般的ではない）．ここでは部分線型空間の直和を考えているが，線型空間の直和も定義され（定義 5.20），本質的には同じものである．

問 5.29. V を線型空間，$W, U \subset V$ を部分線型空間とし，$V = W \oplus U$ が成り立つとする．このとき，$v \in V$ とすると，$v = w + u$，$w \in W$，$u \in U$ と一意的に表されることを示せ．

線型写像の核と像

問 5.16. V, W を線型空間，$f\colon V \to W$ を線型写像とする．f が単射であることと，$\operatorname{Ker} f = \{o\}$ が成り立つことは同値であることを示せ．

[†4] $C^\infty(\mathbb{R})$ は取り敢えずは単なる集合なので，しばしばこのような言い方をする．

問 5.17 (発表する場合には 1) 2) の両方すること).

$A \in M_{m,n}(K)$ とし，$b \in K^m$ について $V_b = \{v \in K^n \mid Av = b\}$ と置く．また，$f\colon K^n \to K^m$ を $f(v) = Av$ により定める．

1) $b, b' \in \operatorname{Im} f$ について，$V_b = V_{b'}$ が成り立つならば $b = b'$ が成り立つことを示せ．

2) $K^n = \displaystyle\bigcup_{b \in \operatorname{Im} f} V_b$ が成り立ち，また，$b \neq b'$ ならば $V_b \cap V_{b'} = \varnothing$ が成り立つことを示せ．つまり，$Av = b$ の解空間による K^n の分割が得られている．

問 5.18. 1) $f\colon K^n \to K^m$ を線型写像とし，K^n, K^m の標準的な基底に関する f の表現行列を A とする．$P \in \mathrm{GL}_m(K)$ を PA が行階段行列（正確には既約行階段行列）であるように選ぶ．$Q = P^{-1} = [q_1 \ \cdots q_m]$ とし，K^n, K^m の順序付き基底をそれぞれ $\mathscr{V} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathscr{W} = (q_1, \ldots, q_m)$ とすると，f の $(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ に関する表現行列は PA に等しく，特に行階段行列であることを示せ．

2) V, W を線型空間とし，$\dim V = n$, $\dim W = m$ とする．また，$f\colon V \to W$ を線型写像とする．このとき，V の順序付き基底 $\mathscr{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ と W の順序付き基底 $\mathscr{W} = (w_1, \ldots, w_m)$ が存在して，$(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ に関する f の表現行列は行階段行列であることを示せ．

問 5.19. $A \in M_{m,n}(K)$ を以下のように定め，$f\colon K^n \to K^m$ を $f(v) = Av$ により定める（m, n は問ごとに自然に定まる）．また，$\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ を K^n の標準的な順序付き基底とする．ここで，$e_1, \ldots, e_n$ は K^n の基本ベクトルである．K^m の順序付き基底 $\mathscr{W} = (w_1, \ldots, w_m)$ を $(\mathscr{E}, \mathscr{W})$ に関する f の表現行列が行階段行列であるように定めよ（$\mathscr{W}$ は必ずしも一意的ではないが，一組挙げれば良い）．

1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 0 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 0 \end{bmatrix}$

問 5.30. 1) $A = [a_1 \ \cdots \ a_r] \in M_{n,r}(K)$，$B = [b_1 \ \cdots \ b_s] \in M_{n,s}(K)$ とする．また，$V = \operatorname{Span}\{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s\}$ とする．

a) $\dim V = \operatorname{rank}[A \ B]$ が成り立つことを示せ．

b) $V = \mathrm{Span}\{a_1, \ldots, a_r\}$ が成り立つことと，任意の j について b_j が $a_1, \ldots, a_r$ の線型結合として表されることは同値であることを示せ．

2) $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix} \in M_{r,n}(K)$，$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix} \in M_{s,n}(K)$ とする．また，$V = \{v \in K^n \mid Av = 0,\ Bv = 0\}$ とする．

a') $\dim V = n - \mathrm{rank} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ が成り立つことを示せ．

b') $V = \{v \in K^n \mid Av = 0\}$ が成り立つことと，任意の i について b_i が $a_1, \ldots, a_r$ の線型結合として表されることは同値であることを示せ．

和空間の性質

定義 5.20. V, W を線型空間とする．

$$V \oplus W = \{(v, w) \mid v \in V,\ w \in W\}$$

と置く（集合としては $V \oplus W = V \times W$ が成り立つ）．また，$(v, w), (v', w') \in V \oplus W$ について

$$(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$$

と定め，$(v, w) \in V \oplus V \oplus W,\ \lambda \in K$ について

$$\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$$

と定める．すると，$V \oplus W$ は線型空間となるので，V と W の**直和**と呼ぶ．

注 5.21. 問 5.15 で考えたのは V の部分線型空間 W, U に関する直和 $W \oplus U$ である．これは定義 5.20 の意味での直和と本質的には同値であるので，差を気にする必要はない．

問 5.22 ***.** 線型空間 V, W の直和 $V \oplus W$ は線型空間であることを示せ．また，$\dim V = n$, $\dim W = m$ とすると $\dim V \oplus W = n + m$ が成り立つことを示せ．
※ $*$ を付けているが，難しいと言うより面倒（なだけ）である．

問 5.23. 1) $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$（線型同型）が成り立つことを示せ．

2) V, W, U を線型空間とすると，自然に $(V \oplus W) \oplus U \cong V \oplus (W \oplus U)$ が成り立つことを示せ．

3) $\overbrace{\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}^{n\,個}$ は自然に $\mathbb{R}^n$ と同型であることを示せ．

※「自然に」というのは専門用語である．現時点で厳密に説明することは難しいが,「あからさまに」であるとか「当たり前に」くらいに考えておけば良い．

以下では次の定理を証明する．

定理 5.24. V を有限次元線型空間とし，$W, U \subset V$ を部分線型空間とする．このとき

$$\dim(W+U) = \dim W + \dim U - \dim W \cap U$$

が成り立つ．

問 5.25 *(定理 5.24 の証明)**.** V を線型空間とし，$W, U \subset V$ を部分線型空間とする．また，W, U は有限次元だとする．W, U はそれぞれ線型空間であるので，V の部分線型空間であることは忘れて $W \oplus U$ を考える．さて，$\iota\colon W \cap U \to W \oplus U$ を

$$\iota(v) = (v, -v)$$

により定める（符号に注意せよ）．また，$\pi\colon W \oplus U \to W + U$ を

$$\pi(w, u) = w + u$$

により定める．

1) ι, π はそれぞれ線型写像であることを示せ．
2) π は全射であることを示せ．また，$\dim \operatorname{Im} \pi = \dim(W+U)$ が成り立つことを示せ．
3) $\operatorname{Ker} \pi = \operatorname{Im} \iota$ が成り立つことを示せ．
4) ι は単射であることを示せ．また，$\dim \operatorname{Im} \iota = \dim(W \cap U)$ が成り立つことを示せ．
5) 次元定理（講義で述べる）を用いて

$$\dim(W+U) = \dim W + \dim U - \dim W \cap U$$

が成り立つことを示せ．

問 5.26 *(定理 5.24 の直接的な証明)**.** V を線型空間とし，$W, U \subset V$ を部分線型空間とする．また，W, U は有限次元だとする．$W \cap U$ は有限次元である（講義で示す．ここでは認めて良い）ことに注意して，$\{v_1, \ldots, v_r\}$ を $W \cap U$ の基底とする．$\dim W = m$, $\dim U = n$ とし，$\{v_1, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_m\}$，$\{v_1, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ をそれぞれ W, U の基底とする．このとき，$\{v_1, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_m, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ は $W+U$ の基底であることを示せ．また，$\dim(W+U) = \dim W + \dim U - \dim W \cap U$ が成り立つことを示せ．

問 5.27 *(問 5.25 の背景その 1)**.** V, W を線型空間とし，$f\colon V \to W$ を線型写像とする．図式

$$\{o_V\} \xrightarrow{\iota_0} \ker f \xrightarrow{\iota_1} V \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \xrightarrow{\zeta} \{o_W\}$$

を考える．ここで，o_V，o_W はそれぞれ V, W の零ベクトルである．また，ι_0, ι_1 は包含写像，ζ は零写像である．すると，上の図式は次の性質を持つことを示せ．即ち，$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z$ を上の図式の任意の一部分とする．すると，$\operatorname{Ker} h = \operatorname{Im} g$ が成り立つ．

問 5.28 *(問 5.25 の背景その 2). $V_0, V_1, \ldots, V_r, V_{r+1}$ を線型空間とし，$V_0 = \{0\}$, $V_{r+1} = \{0\}$ とする．また，$0 \leq k \leq r$ について $f_k \colon V_k \to V_{k+1}$ を線型写像とする．また，任意の k について $\operatorname{Im} f_k = \operatorname{Ker} f_{k+1}$ が成り立つとする．

1) 任意の k について，$\dim V_k = \dim \operatorname{Ker} f_k + \dim \operatorname{Im} f_{k-1}$ が成り立つことを示せ．
2) $\displaystyle\sum_{k:\text{odd}} V_k = \sum_{k:\text{even}} V_k$ が成り立つことを示せ．
3) r が奇数ならば $\displaystyle\sum_{k=0}^{r+1} (-1)^{k+1} \dim V_k = 0$ が成り立つことを示せ．
   ※ 指数は k でも構わないが，少し進んだ事柄[†5]を扱う時に，この方が整合的である．

（以上）

[†5]二年の A セメスターあたりで扱うことが多いと思われる．Betti 数，Euler 数といった概念（定義）が現れる．