２０１９年度数理科学基礎（理 I 6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題 2 v2 2019/4/23（火）
'19/4/18 :（v1）4/19 の講義の進捗によっては追って問を加える.
'19/4/19 :（v2）気になる言説を見かけたので問 2.9 を追加.
'19/4/26 :（v3）問 2.4 を講義と同様に修正.

問 2.1. m_1, m_2, n_1, n_2 を正の整数とし，$m = m_1 + m_2$, $n = n_1 + n_2$ とする．$A \in M_{m,n}(K)$ とし，$A_{ij} \in M_{m_i,n_j}(K)$ を用いて A を $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ と区分けする．また，l_1, l_2 を正の整数とし，$l = l_1 + l_2$ とする．そして，$B \in M_{n,l}(K)$ とし，$B_{ij} \in M_{n_i,l_j}(K)$ を用いて B を $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ と区分けする．このとき

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

が成り立つことを示せ.

問 2.2. $A \in M_n(K)$ とする．A に 0 に等しい列あるいは行が存在するならば A は正則でないことを示せ.

問 2.3. $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．このとき，${}^tA,\ A^* \in \mathrm{GL}_n(K)$ であって，$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$，$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ がそれぞれ成り立つことを示せ.
※ $K = \mathbb{R}$ の場合にはどちらも同じ主張である.

　$A \in M_n(K)$ について A^{-1} が存在するか判定し，存在するならば具体的に求めることについては後日扱う.

問 2.4. 内積は次の性質を持つことを示せ.

1) $a, a', b, b' \in K^n$ とすると

$$\langle a + a' \mid b \rangle = \langle a \mid b \rangle + \langle a' \mid b \rangle,$$
$$\langle a \mid b + b' \rangle = \langle a \mid b \rangle + \langle a \mid b' \rangle$$

がそれぞれ成り立つ.

2) $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とすると

$$\langle \lambda a \mid b \rangle = \lambda \langle a \mid b \rangle,$$
$$\langle a \mid \lambda b \rangle = \lambda \langle a \mid b \rangle$$

がそれぞれ成り立つ.

2') $a, b \in \mathbb{C}^n,\ \lambda \in \mathbb{C}$ とすると

$$\langle \lambda a \mid b \rangle = \lambda \langle a \mid b \rangle,$$
$$\langle a \mid \lambda b \rangle = \overline{\lambda} \langle a \mid b \rangle$$

がそれぞれ成り立つ.

3) $a \in K^n$ とすると

$$\langle a \mid a \rangle \geq 0$$

が成り立つ．また，等号は $a = 0$ のとき，その時のみ成り立つ.

4) $a, b \in \mathbb{R}^n$ とすると

$$\langle b \mid a \rangle = \langle a \mid b \rangle$$

が成り立つ．また，$a, b \in \mathbb{C}^n$ とすると

$$\langle b \mid a \rangle = \overline{\langle a \mid b \rangle}$$

が成り立つ.

問 2.5. $a, b \in K^n$ とする．$\langle a \mid b \rangle = a^* b$ が成り立つことを示せ．特に $K = \mathbb{R}$ の場合には $\langle a \mid b \rangle = {}^t a b$ が成り立つことを示せ.

問 2.6. 写像 $p\colon M_{m,n}(K) \times M_{n,l}(K) \to M_{m,l}(K)$ を $p(A, B) = AB$ により定めると，p は双線型性を持つことを示せ.
ヒント : 単に定義あるいは用語の問題である．また，双線型性を持つ写像のことを双線型写像と呼ぶ.

問 2.7. $A \in M_{m,n}(K),\ B \in M_{n,l}(K)$ とし，$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_l \end{bmatrix}$ を $a_1, \ldots, a_m \in M_{1,n}(K),\ b_1, \ldots, b_l \in K^n = M_{n,1}(K)$ による A, B の区分けとする.

1) $K = \mathbb{R}$ とする．この時

$$AB = \begin{bmatrix} \langle a_1 \mid b_1 \rangle & \langle a_1 \mid b_2 \rangle & \cdots & \langle a_1 \mid b_l \rangle \\ \langle a_2 \mid b_1 \rangle & \langle a_2 \mid b_2 \rangle & \cdots & \langle a_2 \mid b_l \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_m \mid b_1 \rangle & \langle a_m \mid b_2 \rangle & \cdots & \langle a_m \mid b_l \rangle \end{bmatrix}$$

が成り立つことを示せ.

2) $K = \mathbb{C}$ とする．この時

$$\overline{A}B = \begin{bmatrix} \langle a_1 \mid b_1 \rangle & \langle a_1 \mid b_2 \rangle & \cdots & \langle a_1 \mid b_l \rangle \\ \langle a_2 \mid b_1 \rangle & \langle a_2 \mid b_2 \rangle & \cdots & \langle a_2 \mid b_l \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_m \mid b_1 \rangle & \langle a_m \mid b_2 \rangle & \cdots & \langle a_m \mid b_l \rangle \end{bmatrix}$$

が成り立つことを示せ．

問 2.8. $a \in K^n,\ \lambda \in K$ ならば $\|\lambda a\| = |\lambda|\,\|a\|$ が成り立つことを示せ．

問 2.9. $\mathbb{R}$ 上定義された $\mathbb{R}$-値函数（実数値函数）f について考える．

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ が成り立つならば $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ が成り立つことを示せ．
2) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ であるが，$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ は成り立たないような f を一つ具体的に挙げよ．
3) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ が成り立つとする．このとき，$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ は成り立たないことを示せ．
4) 命題「$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ ならば $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ が成り立つ.」は偽であることを示せ．
ヒント：命題を否定するためには反例を挙げるのが簡明である．

※ これらのことは「あたりまえ」のことである．これに反するような言説はなにかおかしいと考えて良い．

（以上）