2019 年度幾何学 III 演習問題 7 v2

’19/12/17（火）

改変履歴．’19/12/17 :（v1）初版作成．概ね 12/17 の講義の分までの内容である．

’19/12/18 :（v2）問 7.11 を修正．

問 7.1. $A=(A^*,d_A),\ B=(B^*,d_B),\ C=(C^*,d_C)$ をそれぞれ複体とし，$f\colon A\to B$, $g\colon B\to C$ をそれぞれコチェイン写像とする．また，複体の添字は $\mathbb{Z}$ とする．

1) $g\circ f=\{g^n\circ f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ とすると，$g\circ f$ は A から C へのコチェイン写像であることを示せ．
2) $a\in Z^r(A)$ とする．このとき，$f^r\colon A^r\to B^r$ について $f^r(a)\in Z^r(B)$ が成り立つことを示せ．また，$a\in B^r(A)$ とすると $f^r(a)\in B^r(B)$ が成り立つことを示せ．
3) f^r は $f\colon H^r(A)\to H^r(B)$ を自然に誘導することを示せ．
4)
$$0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\longrightarrow 0$$
は複体の完全列だとする．誘導される長完全列
$$\cdots\longrightarrow H^{r-1}(C)\xrightarrow{\partial}H^r(A)\xrightarrow{f}H^r(B)\xrightarrow{g}H^r(C)\xrightarrow{\partial}\cdots$$
は完全であることを示せ．

以下では de Rham コホモロジーの具体的な計算について扱う．

問 7.2. $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と見なし，$\pi\colon\mathbb{R}\to S^1$ を射影とする．また，$\tau\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $\tau(x)=x+1$ により定め，$r\in\mathbb{Z}$ について
$$\Omega^r(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}=\{\omega\in\Omega^p(\mathbb{R})\mid\forall x\in\mathbb{R}\mid\tau^*\omega=\omega\}$$
と置く．

1) 特に $r=0$ とする．$f\in\Omega^0(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ であることと，$\forall n\in\mathbb{Z},\ x\in\mathbb{R},\ f(x+n)=f(x)$ が成り立つことは同値であることを示せ．
2) $\omega\in\Omega^r(S^1)$ とする．$\pi^*\omega\in\Omega^r(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ が成り立つことを示せ．
3) $\widetilde{\omega}\in\Omega^r(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ とする．この時，$\pi_*\widetilde{\omega}$ を，$p\in S^1$ について $p=t\mod\mathbb{Z},\ t\in\mathbb{R}$ と表して $(\pi_*\widetilde{\omega})_p=\widetilde{\omega}_t$ と定めると，$\pi_*\widetilde{\omega}$ は well-defined であって，$\pi_*\widetilde{\omega}\in\Omega^r(S^1)$ が成り立つことを示せ．
4) $r=0$ とする．この時，π^*,π_* はそれぞれ環としての同型であって，互いに逆写像であることを示せ．そこで $C^\infty(S^1)=\Omega^0(S^1)=\Omega^0(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ とみなす．

5) $r > 0$ とする．この時，π^*, π_* はそれぞれ $C^\infty(S^1)$-加群としての同型であって，互いに逆写像であることを示せ．また，$\mathbb{R}$ 上の外微分作用素を $d_\mathbb{R}$，S^1 上の外微分作用素を d_{S^1} とすると $d_\mathbb{R} \circ \pi^* = \pi^* \circ d_{S^1}$，$d_{S^1} \circ \pi_* = \pi_* \circ d_\mathbb{R}$ がそれぞれ成り立つことを示せ．

問 7.3. $H^r_{\mathrm{dR}}(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & r = 0, 1, \\ \{0\}, & r \neq 0, 1 \end{cases}$ が成り立つことを以下に従って示せ（ほかの方法もすぐ後で扱う）．

1) $p \in S^1$ を固定する．$\varphi^0\colon H^0_{\mathrm{dR}}(S^1) \cong \mathbb{R}$ を，$c \in H^0_{\mathrm{dR}}(S^1)$ を $c = [f],\ f \in Z^0(S^1)$ と表して $\varphi^0(c) = f(p)$ により定めると，φ^0 は well-defined であって，また，p の選び方に依らないことを示せ．また，φ^0 は線型同型写像であることを示せ．
2) $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と見なし，$\pi\colon \mathbb{R} \to S^1$ を射影とする．$\psi\colon \Omega^1(S^1) \to \mathbb{R}$ を，$\omega \in \Omega^1(S^1)$ について $\psi(\omega) = \displaystyle\int_0^1 \pi^*\omega$ と置くことにより定める．
   a) $\gamma\colon [0, 1] \to S^1$ を $\gamma(t) = t$ により定めれば，線積分の定義により $\psi(\omega) = \displaystyle\int_\gamma \omega$ が成り立つ．ここで，S^1 の基点を固定する．$\zeta\colon [0, 1] \to S^1$ が γ に C^∞ 級にホモトピックならば $\psi(\omega) = \displaystyle\int_\zeta \omega$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：ω が閉形式である必要があるが，ここではこれは自動的に成り立つ．
   b) ψ は基点の取り方に依らないことを示せ．
   c) $\omega = df$ が $f \in \Omega^0(S^1)$ について成り立つならば $\psi(\omega) = 0$ が成り立つことを示せ．
   d) $\psi(\omega) = 0$ とする．$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(t) = \displaystyle\int_0^t \omega$ により定めると f は C^∞ 級であって，$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t + 1) = f(t)$ が成り立つことを示せ．
   e) $\psi(\omega) = 0$ ならば $f \in \Omega^0(S^1)$ が存在して $\omega = df$ が成り立つことを示せ．
3) 最初の主張
$$H^r_{\mathrm{dR}}(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & r = 0, 1, \\ \{0\}, & r \neq 0, 1 \end{cases}$$
が成り立つことを示せ．

問 7.4. $H^r_{\mathrm{dR}}(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & r = 0, n, \\ \{0\}, & r \neq 0, n \end{cases}$ が成り立つ．このことを以下に従って示せ．

1) $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とみなす．そして $U_0 = (-1/6, 2/3) \mod \mathbb{Z},\ U_1 = (1/3, 7/6) \mod \mathbb{Z}$ とする．
   a) U_0, U_1 を図示せよ．また，$U_0 \cap U_1$ を求めよ．
   b) S^1 について主張が成り立つことを示せ．

2) $S^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid {x_0}^2 + \cdots + {x_n}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ と見なす．また，$U_0 = \{(x_0, \ldots, x_n) \in S^n \mid x_n > -1/2\}$, $U_1 = \{(x_0, \ldots, x_n) \in S^n \mid x_n < 1/2\}$ と置く．

a) U_0, U_1 を図示せよ．また，$U_0 \cap U_1$ を求めよ．

b) S^n, $n > 1$ について主張が成り立つことを示せ．

問 7.5. $N \subset M$ を部分多様体とし，$\dim M = m$, $\dim N = n$ とする．$\{U_i\}$ を局所有限な N の開被覆であって，U_i は $D^n \times D^{m-n} \subset \mathbb{R}^m$ に，$U_i \cap N$ は $D^n \subset \mathbb{R}^n$ に同相なものとする．ここで，D^k で k 次元の単位開球を表す．また，$\{U_\lambda\}$ を局所有限な M の開被覆であって，U_i 達を全て含むものとする．

1) このような $\{U_i\}$, $\{U_\lambda\}$ が取れることを示せ．

2) $\{\rho_\lambda\}$ を $\{U_\lambda\}$ に従属する 1 の分割とする．また，$V_i = U_i \cap N$ とする．$\omega \in \Omega^r(N)$ について，$\omega_i = \omega|_{V_i} \in \Omega^r(V_i)$ とする．このとき，$\mu_i \in \Omega^r(U_i)$ であって，$\mu_i|_{V_i} = \omega_i$ が成り立つものが存在することを示せ．また，$\mu = \sum \rho_i \mu_i$ とすると $\mu \in \Omega^r(M)$ であって，$\mu|_N = \omega$ が成り立つことを示せ．

3)

$$0 \to \Omega^*(M, N) \to \Omega^*(M) \to \Omega^*(N) \to 0$$

は複体の完全列であることを示せ．

4) $M = T^2$ とし，$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ と同一視する．

a) $N = \mathbb{R}(1,1)/\mathbb{Z}^2 \subset T^2$ とする．ここで，$\mathbb{R}(1,1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ (x, y) = \lambda(1, 1)\}$ である．このとき，$N \subset M$ は部分多様体であることを示せ．また，3) が成り立つことをなるべく具体的に確かめよ．

b) $N = \mathbb{R}(1, \sqrt{2})/\mathbb{Z}^2 \subset T^2$ とする．このとき，$N \subset M$ は部分多様体ではないことを示せ．また，3) が成り立たないことを示せ．

※ N は多様体（実際には $\mathbb{R}$）から M への単射はめ込みの像である．そこで，このような N を M に**（単射に）はめ込まれた多様体**などと呼ぶ．一方，分野によってはこのような N も部分多様体と呼び，ここでの意味での部分多様体を正規部分多様体と呼ぶこともある．

問 7.6. 1) $T^n = (S^1)^n$ とする．$H^*_{\mathrm{dR}}(T^n)$ を求めよ．

2) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ と見なす．また，$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ と見なし，これに従って $S^{n-1} \subset S^n$ と見なす．このとき，$H^*_{\mathrm{dR}}(S^n, S^m)$，ただし $n \geq m$，を求めよ．

問 7.7. $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq (x-3)^2 + y^2 < 4\}$ とする．X の概形を図示し，$H^*_{\mathrm{dR}}(X)$ を求めよ．
※ de Rham の定理を経由しないと難しいかもしれない．

定義 7.8. 多様体 M 上の 2 形式 ω が**シンプレクティック形式**（symplectic form）であるとは

1) $d\omega = 0$ が成り立つ．
2) ω は M 上で非退化である．即ち，$p \in M,\ v \in T_pM$ について $\forall w \in T_pM,\ \omega_p(v,w) = 0 \Rightarrow v = 0$ が成り立つ．

が満たされることをいう．また，(M,ω) を**シンプレクティック多様体**（symplectic manifold）と呼ぶ．

問 7.9. ω をシンプレクティック形式とする．このとき，$\dim M = 2n$ がある $n \in \mathbb{N}$ について成り立ち，更に，$\omega^n = \overbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}^{n}$ とすると ω^n が M の体積要素が成り立つことを示せ．
ヒント：閉形式であることは使わずに示せる．

問 7.10. (M,ω) をシンプレクティック多様体とする．このとき，M は向き付け可能であることを示せ．また，M を閉多様体とし，$\dim M = 2n$ とすると，$1 \leq i \leq n$ について $[\omega]^i \in H^{2i}_{\mathrm{dR}}(M)$ は非自明である（0 でない）ことを示せ．

問 7.11. M を境界付き多様体とする．$X \in \mathfrak{X}(M)$ について，X による Lie 微分を L_X で表す．

1) $\omega \in \Omega^*(M)$ が閉形式ならば $L_X\omega$ は完全形式であることを示せ．
2) L_X は自然に $H^*_{\mathrm{dR},c}(M)$ から $H^*_{\mathrm{dR},c}(M)$ への準同型（今の場合には線型写像）を定めるが，実際にはこれは零写像であることを示せ．

※ 難しければ $\partial M = \varnothing$ としてよい．

（以上）