2019 年度幾何学 III 演習問題 6 v1 '19/12/10（火）

改変履歴．'19/12/10 :（v1）初版作成．概ね 12/3 の講義の分までの内容である．

問 6.1. $D \subset \mathbb{R}^n$ を星形領域（星形な開集合）とする．

1) D は連結であることを示せ（「領域」は多くの場合連結と仮定するが，これにより星形「領域」と呼んで良いことになる）．
2) D は可縮であることを示せ．

境界付き多様体

問 6.2. M を境界を持つ n 次元の C^r 級多様体とする．

1) M が境界を持たない，即ち $\partial M = \varnothing$ であることと，任意の $p \in M$ について $\varphi_p(U_p) \subset \mathring{\mathbb{R}}^n_- = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < 0\}$ が成り立つことは同値であることを示せ．また，このとき M は通常の意味での C^r 級の多様体であることを示せ．
2) ∂M は境界を持たない $(n-1)$ 次元 C^r 級多様体であることを示せ．また，M が第二可算[†1]ならば ∂M も第二可算であることを示せ．
   ヒント : $\partial M = \varnothing$ ならば定義から直接従う．$\partial M \neq \varnothing$ とする．$V_p = \varphi_p^{-1}(\varphi_p(U_p) \cap \partial \mathbb{R}^n_-)$ として，$\{(V_p, \varphi_p|_{V_p})\}_{V_p \neq \varnothing}$ を考えてみよ．

問 6.3. 連結な境界付き多様体 M が向き付け可能であるならば，M の向きは二種類であることを示せ．

問 6.4. 定義 3.2.6 の $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ は ∂M に向きを定めることを示せ．

問 6.5. M を境界を持つ多様体とする．TM は境界を持つ多様体であって，$\pi\colon TM \to M$ は $\operatorname{rank} TM = \dim M$ を満たすベクトル束であることを示せ．

問 6.6 **. $\dim M = n$ とし，M は向き付け可能であるとする．$\iota\colon \partial M \to M$ を自然な埋め込みとし，$\iota_*\colon T(\partial M) \to TM$ とする．

1) ∂M 上の自明束 $\pi\colon \epsilon \to \partial M$ が存在して $TM|_{\partial M} \cong \epsilon \oplus \iota_* T(\partial M)$ が成り立つことを示せ．

[†1] パラコンパクトであって，連結成分の数は高々可算個，としても同値である．

2) M は向きづけられているとし，ω を M の体積要素とする．∂M には M の向きにより定まる向きを入れ，ν を ∂M の体積要素とする．このとき，$p \in \partial M$ について，M の向きと整合的な，p を含む座標近傍 (U, φ) を，$\varphi(U)$ の座標を $(x_1, \ldots, x_n)$ とすると $\varphi(U) = \{x_1 \leq 0\}$ であるように選ぶと，$\varphi^*\omega = f dx_1 \wedge \varphi^*\nu,\ f > 0$ と表すことができることを示せ．

1-形式の線積分

問 6.7. $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ は微分同相写像とする．$\zeta = \gamma \circ \varphi$ とすると $\displaystyle\int_\zeta \omega = \int_\gamma \omega$ が成り立つことを示せ．

問 6.8. $p \in M$ を基点とする．また，$q \in M$ とし，$\tau\colon [0,1] \to M$ を $\tau(0) = p,\ \tau(1) = q$ を満たす連続写像とする．$\gamma\colon [0,1] \to M$ を連続写像であって $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ をみたすものとするとき，$\gamma^\tau\colon [0,1] \to M$ を

$$\gamma^\tau(t) = \begin{cases} \tau(1-3t), & t \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right], \\ \gamma(3t-1), & t \in \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right], \\ \tau(3t-2), & t \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

により定める．また，$\tau_*\colon \pi_1(M, p) \to \pi_1(M, q)$ を

$$\tau_*([\gamma]) = [\gamma^\tau]$$

により定める．

1) τ_* は群の準同型であることを示せ．
2) τ' も $\tau'(0) = p,\ \tau(1) = q$ を満たす連続写像とする．τ と τ' がホモトピックならば $\tau_* = \tau'_*$ が成り立つことを示せ．また，τ と τ' がホモトピックでなく，$\tau_* = \tau'_*$ も成り立たない例を一つ挙げよ．

問 6.9. $\omega \in \Omega^1(M)$ は閉形式とする．閉曲線や τ は区分的に C^∞ 級とする．$a \in \pi_1(M, p)$ を $a = [\gamma]$ と表すと，

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma^\tau} \omega$$

が成り立つことを示せ．即ち，$\langle a, \omega \rangle = \langle \tau_* a, \omega \rangle$ が成り立つ．

問 6.10.

$$H^1_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{R}) = \{\omega \in \Omega^1(M) \mid d\omega = 0\}/\{\omega \in \Omega^1(M) \mid \exists\, f \in \Omega^0(M),\ \omega = df\}$$

と定める．$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \pi_1(M,p) \times H^1_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を

$$\langle[\gamma],[\omega]\rangle = \int_\gamma \omega$$

により定めればこれは well-defined であって，双準同型であることを示せ．また，このペアリングは基点の選び方に依らないことを示せ．

$H^1_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{R})$ は 1 次の **de Rham コホモロジー群**である．de Rham コホモロジーについては後で詳しく述べる．また，$\pi_1(M,p)$ は $H_1(M;\mathbb{R})$ に置き換えることができるほか，S^k, $k > 1$ から M への写像がある場合にも，$\pi_k(M,p)$ と関連して類似のことが成り立つが，ここではこれらについては省略する．

（以上）