2019 年度幾何学 III 演習問題 5 v1

’19/11/28（木）

改変履歴．’18/11/28 :（v1）初版作成．概ね 11/26 の講義の分までの内容である．

Lie 微分

問 5.1. X をベクトル場とし，$\{\varphi_t\}$ を X に附随する一径数局所変換群（フロー）とする．ω を (r,s)-テンソルとすると，以下は同値であることを示せ．

1) $(\varphi_t)_*\omega = \omega$ が（絶対値が）十分小さな t について成り立つ．ただし，共変テンソル（微分形式）α については $\varphi_*\alpha = (\varphi^{-1})^*\alpha$ と定める．
2) $L_X\omega = 0$ が成り立つ．

これらの同値な条件が成り立つ時，ω は X **により不変である**，あるいはより短く X**-不変である**などと言う．

テンソルの縮約，Einstein の規約

問 5.2. テンソルの縮約は well-defined であることを示せ．

問 5.3. Lie 微分と縮約は可換であることを示せ．

問 5.4. T を (r,s) テンソル場とし，局所的に

$$T = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_r\\ j_1,\ldots,j_s}} T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

と表す．$1 \leq a \leq r$，$1 \leq b \leq s$ とし，i_a と j_b に関して T の縮約を取って得られる $(r-1,s-1)$ テンソルを S とする．

1)
$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i_1,\ldots,\widehat{i_a},\ldots,i_r\\ j_1,\ldots,\widehat{j_b},\ldots,j_s}} T^{i_1,\ldots,\overset{a}{\smile}{k},\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,\underset{\smile}{\overset{b}{k}},\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}$$
$$\otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{dx^{j_b}} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

　　が成り立つことを示せ．

2) Eistein の規約を用いると，

$$S = T^{i_1,\ldots,\overset{a}{\smile}{k},\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,\overset{b}{\smile}{k},\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}$$
$$\otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{dx^{j_b}} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

と表されることを確かめよ．

問 5.5. $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ の標準的な基底をそれぞれ $\mathscr{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$，$\mathscr{F} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ で表す．また，$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線型写像とし，$A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ を $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ に関する F の表現行列とし，

$$\varphi = \sum_{i,j} f_i a_{ij} e_j^*$$

と定める．

1) $\varphi \in \mathbb{R}^m \otimes (\mathbb{R}^n)^*$ が成り立つことを示せ．テンソル積の順序はあまり気にしなくて良い（以下同様）．
2) $v \in \mathbb{R}^n$ について，
$$\varphi(v) = \sum_{i,j} f_i a_{ij} e_j^*(v)$$
と定めれば，
$$\forall\, v \in \mathbb{R}^n,\ F(v) = \varphi(v)$$
が成り立つことを示せ．
3) $v \in \mathbb{R}^n$ について $\varphi \otimes v \in \mathbb{R}^m \otimes (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$ を考える．$\gamma\colon \mathbb{R}^m \otimes (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を第二成分と第三成分に関する縮約とすると，$v \in \mathbb{R}^n$ について
$$\gamma(\varphi \otimes v) = F(v)$$
が成り立つことを示せ．

問 5.6. M を多様体とし，$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を M の座標近傍系とする．また，$\varphi_\alpha(U_\alpha)$ の座標を $({x_\alpha}^1, \ldots, {x_\alpha}^n)$ とする．さて，$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 上で $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ {\varphi_\alpha}^{-1}$ と置く．各 $\alpha \in A$ について，U_α 上の函数族 $\{{T_\alpha}^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s}\}$ が定まっていて，

$${T_\beta}^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s} = {T_\alpha}^{k_1,\ldots,k_r}{}_{l_1,\ldots,l_s} {(D\varphi_{\beta\alpha})_{k_1}}^{i_1} \cdots {(D\varphi_{\beta\alpha})_{k_r}}^{i_r} {(D\varphi_{\beta\alpha})^{l_1}}_{l_1} \cdots {(D\varphi_{\beta\alpha})^{l_s}}_{j_s},$$

ただし，$D\varphi_{\beta\alpha}$ の (i,j) 成分を ${(D\varphi_{\beta\alpha})^i}_j$，$(D\varphi_{\beta\alpha})^{-1}$ の (i,j) 成分を ${(D\varphi_{\beta\alpha})_i}^j$ でそれぞれ表す，が成り立つことと，

$$T = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_r \\ j_1,\ldots,j_s}} {T_\alpha}^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial {x_\alpha}^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial {x_\alpha}^{i_r}} \otimes d{x_\alpha}^{j_1} \otimes \cdots \otimes d{x_\alpha}^{j_s}$$

とすると，T は大域的に定まった (r,s)-テンソルであることは同値であることを示せ．
※ 伝統的には物理では前者の記述が，数学では後者の記述が好まれる傾向にある．

（以上）