2019 年度幾何学 III 演習問題 4 v2
'19/11/22（金）
改変履歴．'19/11/22：（v1）初版作成．概ね 11/19 の講義の分までの内容である．
'19/12/2：（v2）問 4.9 を追加．

計量について（続き）

問 4.1. g をリーマン計量とし，$\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ を TM の局所自明化であって，$g(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ が成り立つものとする（このような $\mathscr{E}$ を（局所）**正規直交枠**と呼ぶ）．

1) $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$ を局所座標により定まる TM の局所自明化とする．g に関する正規直交枠を $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ や g の行列表示（の成分）を用いて一つ与えよ．
2) T^*M の局所自明化 $\mathscr{E}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ を条件 $e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ により定める．$\mathscr{E}^*$ を T^*M の $\mathscr{E}$ **に双対な枠**と呼ぶ．$\mathscr{E}^*$ は g^* に関する T^*M の正規直交枠であることを示せ．

問 4.2. V を実線型空間，g を V の計量とする（ユークリッド計量とは仮定しない）．講義のように $V^{r,s}$ 上の双線型形式 $g^{r,s}$ を定めると，$g^{r,s}$ は $V^{r,s}$ の計量であることを示せ．また，特に元の g が V のユークリッド計量であるならば $g^{r,s}$ もユークリッド計量であることを示せ．
ヒント：双線型性と対称性は容易に示せる．$\mathscr{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ を V の基底，$\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ を V^* の双対基底とする．このとき，$V^{r,s}$ の基底として $\mathscr{E}^{r,s} = \{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes_{i_r} \otimes e_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{j_s}^*\}$ を考えることができる．$\mathscr{E}$ に関する g の表現行列を G とすると $\mathscr{E}^{r,s}$ に関する $g^{r,s}$ の表現行列は $G^{\otimes r} \otimes (G^{-1})^{\otimes s}$ により与えられる．このことから $g^{r,s}$ は非退化であることが従う．また，g がユークリッド計量，即ち正値であるならば $g^{r,s}$ も正値であることも従う．

問 4.3. V を実線型空間とし，g を V の計量とする（ユークリッド計量とは仮定しない）．講義のように，行列式を用いて $\bigwedge^s V^*$ 上の双線型形式 g を定めると，g は計量であることを示せ．特に元の g が V 上のユークリッド計量ならば $\bigwedge^s V^*$ 上の g もそうである．
ヒント：$\bigwedge^s V^*$ 上の g を g^* で表す．g^* が対称双線型形式であることは容易に示せる．$\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ を V^* の基底であって，$\mathscr{E}$ に関する g の表現行列が対角行列 $(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus (\lambda_n)$ であるようなものとする．$I = \{i_1, \ldots, i_s \mid i_1 < \cdots < i_s\}$ について $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_s}$ と定める

と，$\{e_I\}$ は $\bigwedge^s V^*$ の基底である．また，

$$g^*(e_I, e_J) = \begin{cases} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_s}, & I = J, \\ 0, & I \neq J \end{cases}$$

が成り立つ．

Lie 微分について

ここではテンソル場 ω の，ベクトル場 X に関する Lie 微分を $L_X\omega$ で表す．

問 4.4. ω を $(0, r)$-テンソル場とする．

1) $L_X\omega$ は U 上の $(0, r)$-テンソル場であることを示せ．
2) ω を固定すると，$L_X\omega$ は X に関して線型であることを示せ．また，

$$L_{fX}\omega(X_1, \ldots, X_r) = fL_X\omega(X_1, \ldots, X_r) + \sum_{k=1}^{r} X_k(f)\omega(X_1, \ldots, \overset{k}{\smile}{X}, \ldots, X_r)$$

が成り立つことを示せ．

問 4.5. X を固定すると L_X は線型であることを示せ．また，

$$L_X(\omega \otimes \mu) = (L_X\omega) \otimes \mu + \omega \otimes (L_X\mu)$$

が成り立つことを示せ．特に，対称形式，交代形式に関して

$$L_X(\omega \odot \mu) = (L_X\omega) \odot \mu + \omega \odot (L_X\mu),$$

$$L_X(\omega \wedge \mu) = (L_X\omega) \wedge \mu + \omega \wedge (L_X\mu)$$

がそれぞれ成り立つことを示せ．

ヒント：後半は前半を対称化，交代化すれば示せる．

問 4.6. 補題 2.4.22 に類似して，対称形式と対称積に関して

$$\iota_v(\omega \odot \mu) = \frac{1}{r+s}(r(\iota_v\omega) \odot \mu + s\omega \odot (\iota_v\mu))$$

が成り立つことを示せ．

問 4.7. $L_{[X,Y]} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$ が成り立つことを示せ．

問 4.8. $d\omega(X_0, \ldots, X_r) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k L_{X_k}\omega(X_0, \ldots, \widehat{X_k}, \ldots, X_r)$ が成り立つことを示せ．

問 4.9. $\omega \in \Omega^r(U)$ について，$d'\omega$ を次のように定めると，$d'\omega = d\omega$ が成り立つ．このことを以下に従って示せ．$p \in U$ とし，$v_0, \ldots, v_r \in T_pU$ とする．ここで，$X_0, \ldots, X_r \in \mathcal{X}(U)$ を $X_i(p) = v_i$ が成り立つように定める．

1) このような X_i が存在することを示せ．

講義での式 (2.4.16) の右辺と同様に，

$$\begin{aligned} &d'\omega(v_0, \ldots, v_r) \\ &= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i X_i \omega(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_r)(p) \\ &\qquad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_r)(p) \end{aligned}$$

と定める．

2) $d'\omega(v_0, \ldots, v_r)$ は X_i たちの選び方によらないことを示せ．

3) 一般に，$Y_0, \ldots, Y_r \in \mathcal{X}(U)$ について $d'\omega(Y_0, \ldots, Y_r)(p) = d'\omega(Y_0(p), \ldots, Y_r(p))$ により定める．すると $d'\omega(Y_0, \ldots, Y_r) = d\omega(Y_0, \ldots, Y_r)$ が成り立つことを示せ．

（以上）