2019 年度幾何学 III 演習問題 3 v2

'19/11/12（火）

改変履歴．'19/11/11：（v1）初版作成．概ね 11/5 の講義の分までの内容である．

'19/11/19：（v2）日付などがいろいろおかしかったので修正．内容は初版と同一である．

テンソル積などについて

問 3.1. $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ を TM の局所自明化の族とする．このとき，$\{(U_\alpha, {\psi_\alpha}^{\otimes r} \otimes {\psi_\alpha^*}^{\otimes s})\}$ は $T^{r,s}M$ の局所自明化の族であって，変換函数は $({\rho_{\beta\alpha}}^{\otimes r} \otimes ({}^t\rho_{\alpha\beta}^{-1})^{\otimes s})$ で与えられることを示せ．

問 3.2. ω, μ, ν をそれぞれ U 上の対称形式で，次数をそれぞれ p, q, r とする．このとき，

$$\omega \odot \mu = \mu \odot \omega,$$

$$(\omega \odot \mu) \odot \nu = \omega \odot (\mu \odot \nu)$$

がそれぞれ成り立つことを示せ．

問 3.3. ω を U 上の $(0,k)$-テンソル場とする．このとき，$\mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}(\omega)) = \mathrm{Sym}(\omega)$ が成り立つことを示せ．

問 3.4. $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Omega^1(U)$ とする．このとき，

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (\operatorname{sgn} \sigma) \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(k)}$$

が成り立つことを示せ．

計量について

問 3.5. $\dim M = n$ とする．

1) $\operatorname{rank} \bigwedge^n T^*M = 1$ が成り立つことを示せ．
2) $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を M の座標近傍系とする．$\varphi_\alpha(U_\alpha)$ の座標を $x_{\alpha,1}, \ldots, x_{\alpha,n}$ とすると，$dx_{\alpha,1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha,n}$ は U_α 上の $\bigwedge^n T^*M$ の自明化であって，U_α から U_β への変換函数は $\det \rho_{\beta\alpha}^{-1}$ で与えられることを示せ．
3) M を連結とする．M が向き付け可能であることと，$\bigwedge^n T^*M$ が自明であることは同値であることを示せ．また，この条件は $\bigwedge^n TM$ が自明であることと同値であることを示せ．

問 3.6. g を M 上の計量とする．M が連結ならば $\operatorname{sgn} g_p$ は $p \in M$ によらないことを示せ．
ヒント：シルベスターの慣性律を用いよ．

問 3.7. $f\colon M \to N$ とし，g を N 上の計量とする．

1) f^*g が M 上の計量であるならば $\dim M \leq \dim N$ が成り立つことを示せ．
2) $\dim M \leq \dim N$ であっても f^*g は計量とは限らないことを示せ．
3) M, N を連結とする．f が微分同相ならば $\operatorname{sgn} f^*g = \operatorname{sgn} g$ が成り立つことを示せ．

問 3.8. 体積形式は $\bigwedge^n T^*M$ の大域自明化であることを示せ．また，M が向き付け可能であることと，$\bigwedge^n T^*M$ が自明であることは同値であることを示せ[†1]．

M を多様体とし，$\bigwedge^n T^*M$ は自明だとする．ω を体積要素（$\bigwedge^n T^*M$ の大域自明化）とすると，M には次のように向きが定まる．$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を M の座標近傍系とする．α を一旦固定し，$\varphi_\alpha(U_\alpha)$ の座標を $(x_1, \dots, x_n)$ とする．$\varphi_\alpha^{-1*}\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ と表す．ω は大域自明化なので $f > 0$ あるいは $f < 0$ が $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ 上成り立つ．$f > 0$ ならば $(V_\alpha, \psi_\alpha) = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ とする．$f < 0$ であれば $\varphi_\alpha = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ と表して $\psi_\alpha = (-\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ と定め，$(V_\alpha, \psi_\alpha) = (U_\alpha, \psi_\alpha)$ とする．

問 3.9.
1) このように定めた $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ は M に向きを定めることを示せ．この向きを体積要素 ω により定まる M の向きと呼ぶ．
2) $-\omega$ により定まる M の向きは ω により定まる向きと逆の向きであることを示せ．

問 3.10. M, N は連結であって，向きづけられているとする．また，$n = \dim M = \dim N$ とする．最後に，$f\colon M \to N$ をはめ込みとする．

1) f は沈め込みであることを示せ．
2) ω_N を N の体積要素とする．$f^*\omega_N$ が M の体積要素であることと，f が向きを保つことは同値であることを示せ．

問 3.11. $U \subset M$ を開集合とする．また，$\omega_1, \dots, \omega_p \in \Omega^1(U)$ とする．このとき，

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (\operatorname{sgn} \sigma) \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(p)}$$

が成り立つことを示せ．
※ Kobayashi に従うと係数が変わる．

問 3.12. $U \subset M$ を開集合とする．$\sigma \in \Gamma_U(S^r(T^*U))$ を r 次の対称テンソル場，$\omega \in \Gamma_U(A^r(T^*U))$ を r 次の交代テンソル場（r-形式）とする．また，$X \in \Gamma_U(S^r(TU))$ を $(r, 0)$-対称テンソル場，$Y \in \Gamma_U(A^r(TU))$ を r 次の $(r, 0)$-交代テンソル場とする．

[†1] M が第二可算なのでリーマン計量が存在することを用いるとよい．

1) $\sigma(Y) = 0$ および $\omega(X) = 0$ が成り立つことを示せ．

2) U は座標近傍だとし，局所的に

$$\sigma = \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_r} f_{i_1,\ldots,i_r} dx_{i_1} \odot \cdots \odot dx_{i_r},$$

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} g_{i_1,\ldots,i_r} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$$

と表す．また，

$$X = \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_r} \alpha_{i_1,\ldots,i_r} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \odot \cdots \odot \frac{\partial}{\partial x_{i_r}},$$

$$Y = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \beta_{i_1,\ldots,i_r} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}$$

と表す．

$$\sigma(X) = \frac{1}{r!} \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_r} f_{i_1,\ldots,i_r} \alpha_{i_1,\ldots,i_r},$$

$$\omega(Y) = r! \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_r} g_{i_1,\ldots,i_r} \beta_{i_1,\ldots,i_r} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}$$

が成り立つことを示せ．

※ $\omega(Y)$ に関しては Kobayashi に従うと係数が変わる．

（以上）