2019 年度幾何学 III 演習問題 2 v1

’19/10/29（火）

改変履歴．’18/10/28 :（v1）初版作成．’19/11/22 :（v2）年度の修正．内容は同一である．

・原則として講義の記号を用いる．

・「$*$」がついている問はやや進んだ事柄であったり，専門的な事柄（研究に近い事柄を扱わないとあまり現れない事柄）に関するものである．これらについては解くのは後回しにして構わない．「$*$」の数が多いほどその度合いは高い．

・講義での節に合わせて問題を分けている．概ねその節で扱ったことに関する問題であるが，時々それ以前に扱ったことに関する問が含まれる．

ベクトル束の向き

問 2.1. $\pi\colon E \to M$ は向き付け可能であるとし，局所自明化の族 $\mathscr{U} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ は E に向きを定めるとする．$\iota\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ を $\iota(x_1,\dots,x_r) = \iota(-x_1,x_2,\dots,x_r)$ により定め，$\psi'_\alpha = (\mathrm{id}_{U_\alpha}, \iota\circ\mathrm{pr}_2\circ\psi_\alpha)$ とすれば $-\mathscr{U} = \{(U_\alpha, \psi'_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ は $\mathscr{U}$ と異なる向きを定めることを示せ．ここで $\mathrm{pr}_2\colon U_\alpha\times\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ は第二成分への射影である．この向きを $\mathscr{U}$ の定める向きと逆の向きと呼ぶことがある．

※「$-\mathscr{U}$」はここでの記号である．

問 2.2. M は連結だとする．$\pi\colon E \to M$ は向き付け可能であるとし，$\mathscr{U} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ は E の向きを定めるとする．$\mathscr{V}$ も E の向きを定めるならば，$\mathscr{V}$ は $\mathscr{U}$ あるいは $-\mathscr{U}$ のいずれか一方，いずれか一方のみと同じ向きを定めることを示せ．従ってある向きに関して，それと異なる向きは逆の向きである．

問 2.3. 1) 自明束は向き付け可能であることを示せ．

2) $\pi\colon E \to S^1$ をメビウスの帯とすると，これは向き付け不可能であることを示せ．
ヒント : 示し方は幾つかある．例えばホモロジーを用いても良い．また，E が自明であるならば，自明な切断の像を再び S^1 で表すと $E\setminus S^1$ は連結でないが，実際には $E\setminus S^1$ は連結であることを示しても良い．なお，$E\setminus S^1$ を考えることは図形的には E を「中心線」で切り離すことを意味する．

接空間と接束

問 2.4. 定義 1.3.3 の $\sim$ は同値関係であることを確かめよ．

問 2.5 ***.** M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ とコサイクル $\rho = \{\rho_{\beta\alpha}\}$ から演習の問 1.2 のようにベクトル束 E_ρ を定めると，$\pi\colon E_\rho \to M$ には自然に C^∞ 級のベクトル束の構造が定まり，この構造は開被覆によらないことを示せ．また，任意の α, β について $\rho_{\beta\alpha}$ が向きを保つならば E_ρ は向き付け可能であることを示せ.
※ そもそも E_ρ が多様体であることや，π が連続，さらには C^∞ 級であることなどを示す必要がある.

問 2.6. M を C^r 級の多様体とすると TM は C^{r-1} 級の多様体であることを示せ.

問 2.7. $\mathfrak{X}(U)$ は $C^\infty(U)$-加群であることを確かめよ.

問 2.8. 1) 任意の $X \subset M$ に関して $C^\infty(M) \subset C^\infty(X)$ が成り立つことを示せ.

2) $X \subset Y \subset M$ ならば $C^\infty(Y) \subset C^\infty(X)$ が成り立つことを示せ．特に，任意の $X \subset M$ について $C^\infty(M) \subset C^\infty(X)$ が成り立つ.

3) $C^\infty(X)$ は単位可換環であることを示せ.

※ 関連して，写像の芽（germ）に関して調べてみよ.

問 2.9. 切断 $X\colon U \to TM$ が C^∞ 級である，即ち $X \in \mathfrak{X}(U)$ が成り立つのは，$f_1, \dots, f_n\colon U \to \mathbb{R}$ を条件

$$X = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

により定めたとき，各 f_i が C^∞ 級であるとき，その時のみであることを示せ.

問 2.10. M を多様体とし，$i = 1, 2$ について (U_i, φ_i) を M の座標近傍で $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ が成り立つものとする．$\pi\colon TM \to M$ を接バンドルとし，$\psi_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$ を (U_i, φ_i) により定まる TM の局所自明化とする．$(U_1 \cap U_2, \psi_1)$ から $(U_1 \cap U_2, \psi_2)$ への変換函数は $D(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)}$ であることを示せ.

問 2.11. 1) $\mathbb{R}^n$ を一般の多様体とみなし，$T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ が成り立つことを示せ.
ヒント：例えば $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を座標近傍と考えると簡単である．一般に，微分同相写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を座標近傍と考えても示せる.

2) $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ が成り立つことを示せ.

3) M をメビウスの帯とすると，$TM \not\cong M \times \mathbb{R}^2$ が成り立つ．このことを説明せよ．可能であれば証明せよ.

多様体の向き

問 2.12. 1) M が向き付け可能であることと，M の座標近傍系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ であって，任意の $\alpha, \beta,\ U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ について $\det D\varphi_{\beta\alpha} > 0$ が成り立つものが存在することと同値であることを示せ．

2) M は向き付け可能であるとし，座標近傍系 $\mathscr{U}$ は M に向きを定めるとする．

$$\mathscr{V} = \{\mathscr{U}\text{ と整合的な座標近傍全体}\},$$
$$\mathscr{W} = \{\mathscr{U}\text{ と整合的でない座標近傍全体}\}$$

とすると，$\mathscr{V}, \mathscr{W}$ はいずれも M に向きを定める座標近傍系であって，$\mathscr{V}$ は $\mathscr{U}$ と同じ向きを，$\mathscr{W}$ は $\mathscr{U}$ と逆の向きを定めることを示せ．

問 2.13. $f_{*p}(v)$ は well-defined であることを示せ．また，$V \subset N$ を開集合，$U = f^{-1}(V)$ とする．U, V はそれぞれ座標近傍だとし，φ_U, φ_V をそれぞれ座標函数とする．また，$(x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ をそれぞれ $\varphi_U(U), \varphi_V(V)$ の座標とする．このとき，$\varphi_V \circ f \circ \varphi_V = (f_1, \ldots, f_n)$ と表すと

$$f_{*p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right._p\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\varphi_U(p)) \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right._{f(p)} \tag{2.14}$$

が成り立つことを示せ．従って，$\bar{f} = \varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1}$ と置けば，$\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right._p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_m}\right._p\right)$, $\left(\left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right._{f(p)}, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial y_n}\right._{f(p)}\right)$ に関する f_{*p} の表現行列は $D\bar{f}(\varphi_U(p)) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\varphi_U(p))\right)$ に等しい．

ヒント：前半は補題 1.3.4 と似たようなものである．

このように，座標函数をいちいち記すと煩雑になるので，実際にはしばしば省略する．例えば式 (2.14) は

$$f_{*p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right._p\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right._{f(p)}$$

などと表してしまったりするので注意を要する．

問 2.15. $\pi\colon E \to M$ をベクトル束とし，$(e_1, \ldots, e_r)$ を $U \subset M$ 上の局所枠とする．$(e_1^*, \ldots, e_r^*)$ を $(e_1, \ldots, e_r)$ の双対枠とすると，$p \in U$ について $(e_1^*(p), \ldots, e_r^*(p))$ は E_p^* の，$(e_1(p), \ldots, e_r(p))$ に双対な基底であることを示せ．

問 2.16. ベクトル束 $\pi\colon E \to M$ は向き付けられているとする．

1) 定義 1.5.10 により確かに $\pi^*\colon E^* \to M$ には向きが定まることを示せ．

2) $\pi^*\colon T^*M \to M$ が（ベクトル束として）向き付け可能なのは M が向き付け可能であるとき，その時のみであることを示せ．

問 2.17. $\pi\colon M \times \mathbb{R} \to M$ を自明束（自明なベクトル束）とする．$\Omega^0(U) = \Gamma_U(M \times \mathbb{R})$ と自然にみなせる（$C^\infty(U)$ 加群としての自然な同型が存在する）ことを示せ．
※ 一般には「自然でない」同型が沢山存在する．一方，自然なものは一つと言って良い．

ベクトル場などについて

問 2.18. $f\colon M \to M$ を微分同相写像とする．この時，$X \in \mathfrak{X}(M)$ について $f_*X \in \mathfrak{X}(M)$ が

$$f_*X(p) = f_{*p}X(p)$$

により定まることを示せ．
※ f_*X が C^∞ 級であることも示す必要がある．

問 2.19 ***.** $\pi\colon M \to N$ を被覆空間とし，$g\colon M \to M$ は $\pi \circ g = \pi$ を満たす微分同相写像とする（このような g を**被覆変換**（covering transformation）と呼ぶ）．

1) 被覆変換全体は，M の自己微分同相写像（M から M 自身への微分同相写像）全体のなす群 $\mathrm{Diff}(M)$ の部分群をなすことを示せ．
2) $X \in \mathfrak{X}(M)$ とし，$g_*X = X$ が成り立つとすると，$\pi_*X \in \mathfrak{X}(N)$ が

$$\pi_*X(q) = X(p),$$

ただし $p \in \pi^{-1}(q)$，により定まることを示せ．
※ π_*X が C^∞ 級であることも示す必要がある．

問 2.20 ***.** $f\colon M \to N$ とし，$\pi\colon E \to N$ をベクトル束とする．この時，

$$f^*E = \{(p, v) \in M \times E \mid f(p) = \pi(v)\},$$

とし，$f^*\pi\colon E \to M$ を

$$f^*\pi(p, v) = p$$

により定める．f^*Ew を M と E の (f, π) に関する**ファイバー積**と呼ぶ．$(f^*E, f^*\pi)$ は M 上のベクトル束であって，$\operatorname{rank} f^*E = \operatorname{rank} E$ が成り立つことを示せ．また，$\widetilde{f}\colon f^*E \to E$ を

$\widetilde{f}(p,v)=v$ により定めると図式

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\widetilde{f}} & E \\ {\scriptstyle f^*\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M & \xrightarrow[f]{} & N \end{array}$$

は可換であることを示せ.

ヒント：$V\subset N$ を開集合とし，$\psi\colon \pi^{-1}(V)\to V\times\mathbb{R}^r$, $r=\operatorname{rank}E$，を局所自明化とする．$U=f^{-1}(V)$ とすると，$\rho\colon (f^*\pi)^{-1}(U)\,(\subset M\times E)\to U\times\mathbb{R}^r$ が $\rho(p,\alpha)=(p,\mathrm{pr}_2\circ\psi(\alpha))$ により定まる.

問 2.21 ***.** $f\colon M\to N$ とする．$X\in\mathfrak{X}(M)$ とすると，$f_*X\in\Gamma(M;f^*TN)$ が

$$f_*X(p)=(p,f_{*p}(X(p)))$$

により定まることを示せ.

※ この観点から言えば，f_*X が一般には定まらないのは $\widetilde{f}\colon f^*TN\to TN$ があまり良くない写像であるから，ということになる.

問 2.22. M,N をいずれも向き付け可能な多様体とする．このとき，$M\times N$ も向き付け可能であることを示せ．また，M,N を連結とすると，直感的には $M\times N$ の向きは M, N の向きに応じて 4 種類ありそうなものだが，実際には 2 種類である．4 種類の向きについて，実際には同じ向きであるものを類別せよ.

問 2.23. $\pi\colon TM\to M$ を接束とする．$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ を M の座標近傍系とし，TM は U_α 上自明だとする．$\psi_\alpha\colon\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times\mathbb{R}^r$ を $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ により定まる局所自明化とする．この時，$\{(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)\}$ は E の座標近傍系であって，$\pi^{-1}(U_\alpha)$ から $\pi^{-1}(U_\beta)$ への座標変換函数 $\psi_{\beta\alpha}$ は

$$\psi_{\beta\alpha}(p,v)=(\varphi_{\beta\alpha}(p),D\varphi_p v)$$

で与えられることを示せ．また，TM が一般のベクトル束の場合にどうなるか，変換函数 $\rho_{\beta\alpha}$ を用いて記述せよ.

問 2.24. $\pi\colon E\to M$ をベクトル束とする.

1) M は多様体として，$\pi\colon E\to M$ はベクトル束としていずれも向き付け可能であるような例を一組挙げよ．また，このような場合には E は多様体として向き付け可能であることを示せ.

2) M は（多様体として）向き付け不可能であるが，$\pi\colon E \to M$ はベクトル束として向き付け可能であるような例を一組挙げよ．また，このような場合には E は多様体としては向き付け不可能であることを示せ．

3) E は多様体としては向き付け不可能であるが，$\pi\colon E \to M$ はベクトル束として向き付け可能であるような例を一組挙げよ．また，このような場合には M は向き付け不可能であることを示せ．

4) E は多様体としては向き付け可能であるが，$\pi\colon E \to M$ はベクトル束として向き付け不可能であるような例を一組挙げよ．また，このような場合には M は向き付け不可能であることを示せ．

（以上）