2019 年度幾何学 III 演習問題 1 v1

'19/9/29（日）

改変履歴．'19/10/1：（v1）初版作成．10/1 の講義までの内容である．

'19/11/22：（v2）年度の修正．内容は同一である．

・原則として講義の記号を用いる．

・「$*$」がついている問はやや進んだ事柄であったり，専門的な事柄（研究に近い事柄を扱わないとあまり現れない事柄）に関するものである．これらについては解くのは後回しにして構わない．「$*$」の数が多いほどその度合いは高い．

問 1.1. M を位相空間とし，$\pi\colon E \to M$ をランク r のベクトル束とする．

1) $p \in M$ とする．ψ_p を開集合 U_p 上の E の局所自明化とする．$q \in U_p$ について $\psi_p|_{E_q}$ は線型同型写像であることを示せ．
2) $U \subset M$ は空でない連結な開集合とし，U 上 E は自明であるとする．ψ_1, ψ_2 をいずれも U 上の E の局所自明化とし，$\psi_{21}\colon U \times \mathbb{R}^r \to U \times \mathbb{R}^r$ を
$$\psi_{21}(p, v) = \psi_2 \circ \psi_1^{-1}(p, v)$$
により定める．
   i) 連続写像 $\rho_{21}\colon U \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ が存在して
   $$\psi_{21}(p, v) = (p, \rho_{21}(p)v)$$
   が成り立つことを示せ．ρ_{21} を (U, ψ_1) から (U, ψ_2) への**変換函数**（transition function）などと呼ぶもし M が多様体であって，π や ψ（局所自明化）が C^∞ 級ならば ρ_{21} は C^∞ 級であることを示せ．
   ii) ψ_3 も U 上の E の局所自明化とし，$\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$ について $\psi_{\alpha\beta}$，$\rho_{\alpha\beta}$ を i) と同様に定める．このとき，$\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3\}$ について $\psi_{\alpha\gamma} = \psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma}$，$\rho_{\alpha\gamma} = \rho_{\alpha\beta}\rho_{\beta\gamma}$ が成り立つことを示せ．また，$\rho_{\alpha\beta}(p) = \rho_{\beta\alpha}(p)^{-1}$ が成り立つことと，$\rho_{\alpha\alpha}(p) = I_r$ が成り立つことを示せ．

問 1.2. M を多様体，$\{U_\alpha\}$ を M の開被覆とする．$\{\rho_{\alpha\beta}\}$ を，各 $\rho_{\alpha\beta}$ は $U_\alpha \cap U_\beta$ から $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ への C^∞ 級の写像とし（$U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ とする），
$$\rho_{\alpha\gamma} = \rho_{\alpha\beta}\rho_{\beta\gamma}$$
が成り立つとする．この条件を**コサイクル条件**と呼び，$\{\rho_\alpha\}$ を**コサイクル**と呼ぶ．

1) $\rho_{\alpha\alpha} = I_r$ が成り立つことを示せ．

2) $(p,v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^r,\ (q,w) \in U_\beta \times \mathbb{R}^r$ について

$$(p,v) \sim (q,w) \iff p = q \text{ かつ } w = \rho_{\beta\alpha}(p)v$$

と定めると $\sim$ は同値関係であることを示せ.

3) $E_\rho = \left(\coprod_\alpha U_\alpha \times \mathbb{R}^r \right) / \sim$ と置く．また，$a \in E_\rho$ を (p,v) の属する同値類とするとき，$\pi(a) = p$ と定める．このとき，E_ρ には自然に多様体の構造が定まり，$\pi\colon E_\rho \to M$ はベクトル束であることを示せ．E_ρ をコサイクル $\rho = \{\rho_{\alpha\beta}\}$ により定まるベクトル束と呼ぶ.

注 1.3. コサイクル ρ はあるコホモロジーの元を定め，そのコホモロジー類と E_ρ の同型類が一対一に対応する.

問 1.4. (x,y,z) を $\mathbb{R}^3$ の標準的な座標とし，$\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ を

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

により定める．また，(u,v) を $\mathbb{R}^2$ の標準的な座標，$S^1 \subset \mathbb{R}^2$ を単位円周とする．最後に，$\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\pi(x,y,z) = \left(\frac{x + yz}{1 + z^2}, \frac{y - xz}{1 + z^2} \right)$$

により定める.

1) $(x,y,z) \in \Sigma$ ならば $\pi(x,y,z) \in S^1$ が成り立つことを示せ.

2) $(u,v) \in S^1$ とする．$F_{(u,v)} = \pi^{-1}(u,v)$ と置くと $F_{(u,v)} \subset \Sigma$ が成り立つことを示せ．また，$F_{(u,v)}$ をなるべく簡潔に表せ.

3) π の Σ への制限を π_Σ とする．このとき，微分同相写像 $\varphi\colon \Sigma \to S^1 \times \mathbb{R}$ であって，図式

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_\Sigma"'] & S^1 \times \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S^1 \arrow[r, equal] & S^1 \end{tikzcd}$$

が可換となるようなものを一つ挙げよ．ここで，$p\colon S^1 \times \mathbb{R} \to S^1$ は第一成分への射影とする.

問 1.5. 自明な切断による M の像は M と微分同相であって，逆写像は π の制限であることを示せ.

問 1.6. $U \subset M$ を開集合とし，$\psi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ を E の局所自明化とする．$v \in \mathbb{R}^r$ とし，$\sigma_v\colon U \to E$ を $\sigma_v(p) = \psi^{-1}(p, v)$ により定めると．σ_v は E の U 上の切断であることを示せ．

問 1.7 ***.** M を C^∞ 級の多様体とし，$\pi\colon E \to M$ をベクトル束とする．また，M に自然な Lebesgue 測度を入れる．切断として可測なものを許すことにすると，E の大域自明化で，M 上定義されているもの（測度 0 で定義されていないことは許さない）が構成できることを示せ．

　このように，切断として何でも良いことにしてしまうと位相的にはベクトル束を考えることにあまり意味がなくなってしまう．一方，微分方程式や力学系のような分野では可測な切断を考えることもしばしばある．

（以上）