問１. x の函数 y に関する次の微分方程式を解け.
※ 微分方程式（系）を「解く」とは解を全て求めることであった.
ヒント：解の見当をつける際には，積分などは思い切っておおらかに計算してしまうのがよい．講義では必ずしも扱っていないが，大抵の教科書には求積法（と呼ばれる解法）として記述がある.

1) $y' = y^2$　　2) $xy' = y$　　3) $y' = \dfrac{2y+x}{x}$

4) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$　　5) $y' + 2xy = x$　　6) $y' + \dfrac{y}{x} = x$

7) $(5x+4y+1)dx + (4x+2y+3)dy = 0$

8) $\sin y\, dx + (1 + x\cos y)dy = 0$

9) $y = xy' + y'^2$　　10) $y = xy' - e^{y'}$

問２. 行列 X が以下に等しい場合に，$\exp X$ と $\exp(tX)$ をそれぞれ求めよ[†1]．指数函数や三角函数がテーラー展開可能であること，またその展開は既知としてよい.
ヒント：Jordan 標準形に持ち込むのは常に得策というわけではない.

1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　　3) $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，但し s は実定数とする.

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$　　5) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　　6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問３. 以下の常微分方程式（系）を解け.

1) $\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 - 2y_3 \\ y_2' = -3y_1 + 13y_2 - 7y_3 \\ y_3' = -5y_1 + 19y_2 - 10y_3 \end{cases}$　　2) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

問４. 以下の $y = y(x)$ に関する常微分方程式の一般解を求めよ.

1) $y'' + 3y' + 2y = 0$
2) $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0$
3) $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = 0$
4) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

問５. 以下の常微分方程式系を解け.

$$\begin{cases} y_1'' - y_1' - y_2' - y_1 = 0, \\ y_2'' + y_1' + y_2' - 3y_1 - 4y_2 = 0 \end{cases}$$

問６. f を $\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{R}$ 値函数とする．このとき微分方程式

$$\frac{df}{dx}(x) = 3f(x) + xe^{3x}, \quad f(0) = 0$$

[†1] 4), 5), 6) は線型代数演習 齋藤正彦著 東京大学出版会より改題.

を以下の手順に従って解け.

1) まず $\dfrac{df}{dx}(x) = 3f(x)$ を解く.（解は $f(x) = Ce^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$）

2) f が $\dfrac{df}{dx}(x) = 3f(x) + xe^{3x}$ の解であったとして，$g(x) = f(x)e^{-3x}$ とおき，g のみたすべき微分方程式を求める.

3) 上で求めた微分方程式を解き，初期条件 $(f(0) = 0)$ をみたす解を選ぶ.

問 7. 1) 微分方程式

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

の $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をみたす解をそれぞれ求めよ.

ヒント：まず y_2 について微分方程式を解いてみよ.

2) 1) で得た解をそれぞれ Y_1, Y_2 として，行列値函数 Λ を $\Lambda(x) = (Y_1(x)\ Y_2(x))$ により定める（Λ は定義により基本解行列である）. $\Lambda(x)$ は任意の x について正則であることを確かめよ.

3) 2) で作った基本解行列 Λ を用いて微分方程式

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xe^{\frac{1}{2}x^2} \\ e^{\frac{1}{2}x^2} \end{pmatrix}$$

の一般解を求めよ.

問 8. x の函数 y に関する常微分方程式

$(*)$ $\qquad y'' + Py' + Qy = 0, \quad P, Q$ は $\mathbb{R}$ 上定義された x の連続函数

を考える. 以下では（連続な係数を持つ）線型常微分方程式に関する解の存在と一意性を用いてよい.

1) $(*)$ の解 y が $y(0) = y'(0) = 0$ を充たすならば y は恒等的に 0 であることを示せ.

2) y を $(*)$ の解であって，恒等的には 0 ではないものとする. また，$x_0 \in \mathbb{R}$ について $y(x_0) = 0$ であるとする（x_0 は y の零点であるなどという）. このとき，ある $\epsilon > 0$ が存在し，$(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ における y の零点は x_0 のみであることを示せ. すなわち，$x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, $x \neq x_0$ であれば $y(x) \neq 0$ であるような $\epsilon > 0$ が存在することを示せ.

3) $(*)$ の一組の基本解を y_1, y_2 とする. a, b を y_1 の零点であって, 開区間 (a, b) には y_1 は零点を持たないとする. このとき，y_2 は (a, b) に零点を唯一つ持つことを示せ.

4) y を $(*)$ の恒等的には 0 ではない解とし，$J = [a, b]$ を（有界な）閉区間とすると，y の J における零点は有限個であることを示せ.

ヒント：任意の $x \in J$ について x を含む開区間であって，そこにおける y の零点は高々1 個であるようなものがとれることが示せたとする．J はコンパクトなのでハイネ・ボレルの定理（任意の開被覆が有限部分被覆を持つ）を利用できる．

問９． x の函数 $y_n,\ n = 1, 2, \cdots,$ を条件

$$\frac{dy_1}{dx}(x) = xy_1(x),\ y_1(0) = 1,$$
$$\frac{dy_n}{dx}(x) = xy_n(x) + y_{n-1}(x),\ y_n(0) = 1$$

により定める．このとき, $y_n,\ n = 1, 2, \cdots,$ を具体的に求めよ．また，$y(x) = \lim_{n\to+\infty} y_n(x)$ とするとき，y を求めよ．

問１０ (問１１も参照のこと). x の函数 y に関する微分方程式 $y' = -2xy,\ y(0) = 1$ の解を g とし，これを逐次近似法で求めてみる[†2].

1) 解 g を求めよ．
2) $f(x, y) = -2xy$ として, $y_0(x) = 1,\ y_n(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t))dt$ と定めるとき, $y_n(x),\ n = 1, 2, \cdots,$ を具体的に求めよ．
3) 函数 y_n は任意の閉区間 $[0, c]$ 上で函数 g に一様収束することを示せ．
ただし，必要であればテーラーの定理（の特別な場合）

g を $\mathbb{R}$ 上定義された C^∞ 級の函数とするとき, 函数 R_n を

$$R_n(x) = g(x) - \left(g(0) + g'(0)x + \frac{g^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}\right),$$

ただし, $g' = \dfrac{dg}{dx},\ g^{(k)} = \dfrac{d^k g}{dx^k}$, で定めると, ある $a \in (0, x)$ に対して

$$R_n(x) = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}x^n$$

が成り立つ．

を用いてよい．また，前問の y_n についても調べてみよ．

問１１ (問１０も参照のこと). 微分方程式 $y' = -2xy^2,\ y(0) = 1$ の解を g とする．

1) $f(x, y) = -2xy^2$ として, $y_0(x) = 1,\ y_n(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t))dt$ とするとき, $y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x)$ を具体的に求めよ．
2) 解 g を求めよ．
3) y_n は任意の閉区間 $[0, c]$ 上で g に一様収束することを示せ．
4) $x > 0$ とする．$g(x)$ を

$$g(x) = g(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{g^{(n)}(\xi_n)}{n!}x^n$$

[†2] 解の存在を示したときの方法を実際に適用してみる．

と表すことができるが（ただし，ξ_n は $0 < \xi_n < x$ をみたす実数である．ξ_n を具体的に求める必要はない），上の式（の各項）を具体的に計算せよ．

5) 4) において $R_n = \dfrac{g^{(n)}(\xi_n)}{n!}x^n$ と置く．$x > 1$ であると R_n は 0 に収束しないことを示せ．また, g の 0 におけるテーラー級数の収束半径を求めよ．

※ 本当は 2) と 3) は逆で, y_n がどんな函数に収束するか考察して（当たりをつけて）それに本当に収束していることを示すのが本筋である．一方，次の問にある函数のように，テーラー級数は明示的に求まるが，それを初等的に（よく知られている函数を組み合わせて，積分などを用いずに）表すことができないものもある．

問１２．$I = (-1, 1)$ とし，I 上の函数 f を $t \in I$ について

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

と置くことにより定める．

1) f の $t = 0$ を中心とするテーラー級数（剰余項のないテーラー展開）を求めよ．また，求めた級数（冪級数）の収束半径を求めよ．
2) I 上の函数 g を $x \in I$ について

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\sin\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}} \end{aligned}$$

により定める．g の $x = 0$ を中心とするテーラー級数を求めよ．また，求めた級数（冪級数）の収束半径を求めよ．
※ 右辺の積分はいわゆる楕円積分で，明示的に求めることはできないことが知られている．従って積分を実行してからテーラー級数を求めることはできない．

問１３．$a = a(x)$ は $x \in \mathbb{R}$ の連続函数であって，ある実数 $T > 0$ について $a(x+T) = a(x)$ が成り立つとする．さて，y に関する微分方程式

$$(*) \qquad y' = ay$$

を考える．f を恒等的には 0 でない，方程式 $(*)$ の解とし，函数 g を $g(x) = f(x+T)$ により定める．

1) g も方程式 $(*)$ の解であることを示せ．
2) 解の一意性を用いて $g(x) = cf(x)$ を充たす実数 c が唯一つ存在することを示せ．
3) $|c| < 1$ ($|c| > 1$) であれば $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ($\displaystyle\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$) が成り立つことを示せ．
4) $|c| = 1$ であれば $|f(x)|$ は $x \to +\infty$ の時有界であることを示せ．すなわち, ある実数 M, x_0 が存在し, $x > x_0$ のとき $|f(x)| \leq M$ であることを示せ．また, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ が存在しないような例を挙げよ．

問１４．Ψ を条件

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists M > 0\ \text{ s.t. } x > M \Rightarrow |\Psi(x, y)| < \epsilon$$

をみたす $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の C^1 級の函数とする．x の函数 y についての常微分方程式 $y' = \Psi(x, y)$ の解 f であって，$(0, \infty)$ 上で定義され，かつ $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ なるものが存在するような Ψ の例を挙げよ．

問１５．以下のベクトル場 X の積分曲線であって，$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ を通るものを求め，幾つか特徴的な (x_0, y_0) について図示せよ．また，それぞれのベクトル場も簡単に図示せよ．

1) $X(x, y) = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$.
2) $X(x, y) = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$.
3) $X(x, y) = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$.

問１６．X を C^∞ 級のベクトル場とする（実際には C^1 級で十分である）．X の二つの積分曲線は交点を持たないか，あるいは（曲線として）一致することを示せ．

問１７ (やや難しい．また,「特殊」な事例なのでとりあえず後回しにして良い)．$\mathbb{R}^2$ 上の，C^0 級のベクトル場 X であって，積分曲線が必ずしも一意的でないような例を一つ挙げよ．

問１８．２つの C^∞ 級の曲線 $\varphi(t), \psi(t)$ が $t = t_0$ で交わるとする．つまり $\varphi(t_0) = \psi(t_0) \in \mathbb{R}^2$ が成り立つとする．この交点を p とし，φ, ψ が p でなす角を, p における φ, ψ の接線のなす角と定める．

1) $\varphi(t) = \begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{pmatrix}$, $\psi(t) = \begin{pmatrix}\psi_1(t)\\ \psi_2(t)\end{pmatrix}$ と座標を用いて表す．$\varphi(t)$, $\psi(t)$ が $t = t_0$ で直交するための条件を式で表せ．
2) ２つのベクトル場 $X(x, y) = \alpha_1(x, y)\dfrac{\partial}{\partial x} + \alpha_2(x, y)\dfrac{\partial}{\partial y}$, $Y(x, y) = \beta_1(x, y)\dfrac{\partial}{\partial x} + \beta_2(x, y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ が条件 $\alpha_1(x, y)\beta_1(x, y) + \alpha_2(x, y)\beta_2(x, y) = 0$ をみたすとする．このとき, X, Y の積分曲線は交わるのであれば直交することを示せ．ただし, X, Y はいずれも零ベクトル $\left(= 0\dfrac{\partial}{\partial x} + 0\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ にはならないとする．

問１９．$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ と定める．X を U 上の C^∞ 級のベクトル場であって, 任意の $p \in U$ について $X(p) \neq 0$（零ベクトル）であるとする．

1) φ を X の積分曲線であって, $\mathbb{R}$ 上定義されているものとすると次の (a) あるいは (b) が成り立つことを示せ：
   (a) φ のグラフは自分自身とは交わらない, つまり, $\varphi(t) = \varphi(s)$ であれば $t = s$ が成り立つ.
   (b) ある $T > 0$ が存在して $\varphi(t + T) = \varphi(t)$ が任意の実数 t について成り立つ.

2) 最初の仮定をみたすベクトル場であって, 性質 (a) を持つ積分曲線が存在するもの, 性質 (b) を持つ積分曲線が存在するものをそれぞれ一つずつ挙げよ（同じベクトル場でも, 別々のベクトル場でも構わない）.

問２０．全微分方程式 $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$ について考える．この問では，函数や変数による割り算などはおおらかに考えてよいことにする．

1) f が x と y の C^∞ 級函数であるとき，$df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ と定める．右辺は係数に表れる函数が 0 なら 0 とみなす．つまり，$0dx + 0dy$ を 0 と表す．さて，x の函数 h が $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ の解であったとする．また，$\varphi = \varphi(x,y)$ が $d\varphi = fdx + gdy$ をみたすとする．このとき，$\psi(x) = \varphi(x, h(x))$ と定めると $\dfrac{d\psi}{dx} = 0$ が成り立つことを示せ．
※ 逆に，次のように考えることができる．方程式 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f}{g}$ を解くのに，全微分方程式 $fdx + gdy = 0$ を考える．もし $d\varphi = fdx + gdy$ をみたすような $\varphi(x,y)$ を見つけることができたとすると，$\varphi(x,y) = c$（定数）を y について解けば元の方程式の解が得られたことになる．一方 $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$ という方程式の解は $(f(x,y)dx + g(x,y)dy)(X) = 0$ をみたすベクトル場 X と考えるのが良く，そして，元の方程式の解のグラフは X の積分曲線と考えることができるのであった．
2) $d\varphi = fdx + gdy$ なる φ が存在したとすると，$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$ が成り立つことを示せ．
適切に定義をすると，この事実は $d(fdx + gdy) = 0$ と表すことができる．

定義 ２１．$p \in \mathbb{R}^2$ とし，$v = a\dfrac{\partial}{\partial x}_p + b\dfrac{\partial}{\partial y}_p \in T_p\mathbb{R}^2$ を p における $\mathbb{R}^2$ の接ベクトルとする．$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級の函数とするとき，**f の v による微分 $v(f)$** を

$$v(f) = a\frac{\partial f}{\partial x}(p) + b\frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

により定める．X が $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場であるときには（$X_p = X(p) \in T_p\mathbb{R}^2$ に注意して）

$$X(f) = X_p(f)$$

とおいて $X(f)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を **f の X による微分**と呼ぶ．

問２２．定義２１の記号を用いる．X が C^∞ 級ならば $X(f)$ は C^∞ 級の函数であることを示せ．

定義 ２３．$M = N = \mathbb{R}^2$ とし，$\varphi\colon M \to N$ を C^∞ 級の写像とする．(u,w) を $N = \mathbb{R}^2$ の座標とし，$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ と表しておく．さて，$p \in T_pM$ とし，$v = a\frac{\partial}{\partial x}_p + b\frac{\partial}{\partial y}_p \in T_pM = T_p\mathbb{R}^2$ を p における $M = \mathbb{R}^2$ の接ベクトルとする．このとき，$\varphi_{*p}v \in T_{\varphi(p)}N = T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^2$ を

$$\varphi_{*p}v = a\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(p)\frac{\partial}{\partial u}_{\varphi(p)} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(p)\frac{\partial}{\partial w}_{\varphi(p)}\right) + b\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(p)\frac{\partial}{\partial u}_{\varphi(p)} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(p)\frac{\partial}{\partial w}_{\varphi(p)}\right)$$

により定め，**φ の p における微分**などと呼ぶ．φ_{*p} は $d\varphi_p$ などと表すこともある．$\varphi_{*p}v = d\varphi_p(v)$ である．

問２４．定義２３と同じ記号を用いる．φ_{*p} を $T_pM = T_p\mathbb{R}^2$ から $T_{\varphi(p)}N = T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^2$ への写像と看做すと線型写像であることを示し，T_pM と $T_{\varphi(p)}N$ の（順序付き）基底 $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}_p, \dfrac{\partial}{\partial y}_p\right)$, $\left(\dfrac{\partial}{\partial u}_{\varphi(p)}, \dfrac{\partial}{\partial w}_{\varphi(p)}\right)$ に関する表現行列を求めよ．

問２５．定義２３と同じ記号を用いる．$h\colon N = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．このとき，h の $\varphi_{*p}v \in T_{\varphi(p)}N$ による微分について

$$(\varphi_{*p}v)(h) = v(h \circ \varphi)$$

が成り立つことを示せ（実際にはこの式が成り立つように $\varphi_{*p}v$ を定めた）．

問２６．$M = N = X = \mathbb{R}^2$ とし，$\varphi\colon M \to N,\ \psi\colon N \to X$ を C^∞ 級の写像とする．$p \in M,\ v \in T_pM$ とすると，$\psi_{*\varphi(p)}(\varphi_{*p}v) = (\psi \circ \varphi)_{*p}v$ が成り立つことを示せ．ここで $p \in M$ について $\psi \circ \varphi(p) = \psi(\varphi(p))$ である．

注２７．X が $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級のベクトル場，$\varphi\colon M = \mathbb{R}^2 \to N = \mathbb{R}^2$ が C^∞ 級の写像であるとする．このとき，N 上のベクトル場で「φ_*X」を $q \in \mathbb{R}^2$ について $q = \varphi(p),\ p \in M = \mathbb{R}^2$ として

$$(\varphi_*X)_q = \varphi_{*p}X_p$$

により定められるように思えるかもしれないが，一般にはこれは不可能である．問題は二つある．まず，$q = \varphi(p)$ と表すことができるか分からない（φ が全射であるとは限らない）．次に，$q = \varphi(p)$ と表すことができたとしても，$p' \in \mathbb{R}^2$ について $q = \varphi(p')$ が成り立つとき，$\varphi_{*p}X_p = \varphi_{*p'}X_{p'}$ が成り立つとは限らない．

注２７で問題となったようなことが絶対に起きず，φ_*X が定められる場合として，例えば φ が C^∞ 級の微分同相写像[†3]である場合が挙げられる[†4]．

問２８．φ が微分同相写像であるとき，φ_*X は well-defined であって（きちんと定まっていて）C^∞ 級のベクトル場であることを示せ．また，微分同相写像でない C^∞ 級の写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 X であって，φ_*X が well-defined でないような例を一組挙げよ．

問２９．(x, y) を $M = \mathbb{R}^2$ の標準的な座標とし，$X = \alpha\dfrac{\partial}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial}{\partial y}$ を C^∞ 級のベクトル場とする．

1) (u, v) を $N = \mathbb{R}^2$ の標準的な座標とする．$A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ とし，$\varphi\colon M \to N$ を $\varphi(x, y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ により定める．φ は微分同相写像であることを示せ．φ_*X を A の成分を用いてなるべく具体的に求めよ．

[†3] φ が C^∞ 級の微分同相写像であるとは，φ は全単射であって，φ 及びその逆写像 φ^{-1} が共に C^∞ 級であることを言う．

[†4] φ が微分同相写像でなくとも φ_*X が定まる場合はあるが，まったく無条件に定まるためには φ は微分同相写像である必要がある．

2) 特に $\alpha(x,y) = F_{11}x + F_{12}y$，$\beta(x,y) = F_{21}x + F_{22}y$ と，ある定数 $F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}$ を用いて表すことができるとする．X を，行列の記法を真似て $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ と表すことにすると
$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
が成り立つ（このようなベクトル場を**線型**なベクトル場と呼ぶ．なお，F_{ij} 達には時間等の，x, y とは独立なパラメータに依存することを許すことがある）．このとき，
$$\varphi_* X = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
が成り立つことを示せ．

3) X を線型なベクトル場とする．$\mathbb{R}^2$ の基底を適当に取り替えると，X は
$$\alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y},$$
$$(\alpha x + y) \frac{\partial}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial}{\partial y}$$
のいずれかの形に書き換えることが出来ることを示せ．また，それぞれの場合について，積分曲線を求めてベクトル場と共に図示せよ．

4) X を線型なベクトル場とする．$l \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ が X の積分曲線であるとき，l は自然に線型常微分方程式を満たすことを示せ．

注 31．講義やこのプリントでは扱う余裕はないが，常微分方程式を解く方法には様々な物がある．比較的簡単な物としては演算子法，もう少し高級な物には例えば Laplace 変換（与えられた函数を，ある意味で取り扱いやすい別な物に書き換える方法）を用いる物などもある．例えば Laplace 変換を用いる方法について言えば，当てはめることが出来る場合には強力であるが，簡単な方程式でも当てはめることが出来ないこともある．また，Laplace 変換を用いる場合には，最終的には Laplace 逆変換と呼ばれる操作で，元の函数を復元する必要がある．一般にこれを行うためには複素函数（複素積分）に関する知識が要る．複素函数論はこのほかにも，例えば級数解法をきちんと扱うためには必須である．

（以上）

問１の（かなり）略解

以下の略解はかなり端折ってあるので，各自細部を補うこと．

1) 変数分離型の方程式．$y(x)$ が 0 をとらないとすると，

$$\begin{aligned}
&y' = y^2 \\
&\Rightarrow\ \frac{1}{y^2}y' = 1 \\
&\Rightarrow\ \int \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}dx = \int dx \\
&\Rightarrow\ \int \frac{1}{y^2}dy = \int dx \\
&\Rightarrow\ -\frac{1}{y} = x + C \quad (C \text{ は任意定数}) \\
&\Rightarrow\ y = -\frac{1}{x+C}
\end{aligned}$$

また，$y(x) \equiv 0$ も解である．よって[†5]解は $y = -\dfrac{1}{x+C}$ または $y \equiv 0$（恒等的に 0）．

2) 変数分離型の方程式．$y(x)$ が 0 をとらないとする．

$$\begin{aligned}
&xy' = y \\
&\Rightarrow\ \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \\
&\Rightarrow\ \int^x \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \frac{1}{x}dx \\
&\Rightarrow\ \log|y| = \log|x| + C_1 \quad (C_1 \text{ は任意定数}) \\
&\Rightarrow\ y = \pm e^{C_1}x
\end{aligned}$$

ここで $\pm e^{C_1}$ の部分は 0 でない定数 C_2 に置き換えることができる．また，$y \equiv 0$ も解なので，解は $y(x) = Cx$ $(C \in \mathbb{R})$.

3)

$$\begin{aligned}
&y' = \frac{2y+x}{x} \\
&\Rightarrow\ y' = 2\frac{y}{x} + 1
\end{aligned}$$

より，同次型の方程式である．$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ とおくと，$y(x) = xu(x)$ より $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$ が従う．よって

$$\begin{aligned}
&u + xu' = 2u + 1 \ \Rightarrow\ \frac{1}{u+1}u' = \frac{1}{x} \ \Rightarrow\ \int^u \frac{1}{u+1}du = \int^x \frac{1}{x}dx \\
&\Rightarrow\ \log|u+1| = \log|x| + C_1 \quad (C_1 \text{ は任意定数}) \\
&\Rightarrow\ u = -1 \pm e^{C_1}x
\end{aligned}$$

[†5]たとえばここはなぜ「よって」なのか考える必要がある．以下では注意しない．

このことから $u = Cx - 1$ $(C \in \mathbb{R})$ と書けることがわかる．$u = \dfrac{y}{x}$ であったので $y(x) = Cx^2 - x$ が解となる．

4) 一階線型微分方程式である．式の両辺に $e^{\sin x}$ を掛けると

$$\begin{aligned} & y'e^{\sin x} + ye^{\sin x}\cos x = e^{\sin x}\sin x\cos x \ \Rightarrow\ \frac{d}{dx}(ye^{\sin x}) = e^{\sin x}\sin x\cos x \\ & \Rightarrow\ ye^{\sin x} = \int^x e^{\sin x}\sin x\cos x dx \end{aligned}$$

さて，この右辺の積分は $t = \sin x$ と変数変換すると

$$\int^x e^{\sin x}\sin x\cos x dx = \int^t e^t t\cos x\frac{1}{\cos x}dt = \int^t te^t dt = te^t - e^t + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

と計算できる．変数を t から x に戻して

$$ye^{\sin x} = e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C \ \Rightarrow\ y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$$

よって解は $y(x) = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$.

5) 一階線型微分方程式である．式の両辺に e^{x^2} を掛けると

$$\begin{aligned} & y'e^{x^2} + 2xe^{x^2}y = xe^{x^2} \ \Rightarrow\ \frac{d}{dx}(ye^{x^2}) = xe^{x^2} \ \Rightarrow\ ye^{x^2} = \int^x e^{x^2}dx \\ & \Rightarrow\ ye^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + C \ (C \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

よって解は $y(x) = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$.

6) 一階線型微分方程式．式の両辺に x を掛けると

$$xy' + y = x^2 \ \Rightarrow\ \frac{d}{dx}(xy) = x^2 \ \Rightarrow\ xy = \frac{1}{3}x^3 + C \ (C \text{ は任意定数})$$

よって解は $y(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{C}{x}$ となる．

7) 全微分方程式である．これが完全微分型であることが、

$$\frac{\partial}{\partial y}(5x + 4y + 1) = 4 = \frac{\partial}{\partial x}(4x + 2y + 3)$$

であることからわかる。そこで $\phi(x, y)$ を

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 5x + 4y + 1,\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 4x + 2y + 3$$

が成り立つように定めたい．第１式を x について積分して

$$\phi(x, y) = \frac{5}{2}x^2 + 4xy + x + f(y) \ (f(y) \text{ は } y \text{ のみによる関数})$$

が得られる．これを第２式に代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{5}{2}x^2 + 4xy + x + f(y)\right) = 4x + 2y + 3 \\ & \Rightarrow\ 4x + f'(y) = 4x + 2y + 3 \end{aligned}$$

これより $f'(y) = 2y + 3$．よって $f(y) = y^2 + 3y + C$ (C は任意定数) となる．よって $\phi(x, y) = \frac{5}{2}x^2 + 4xy + x + y^2 + 3y + C$ と置け，求める解は

$$\frac{5}{2}x^2 + 4xy + y^2 + x + 3y = C_1 \ (C_1 \text{ は任意定数})$$

となる．

8) 全微分方程式．これが完全微分型であることが

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sin y) = \cos y = \frac{\partial}{\partial x}(1 + x\cos y)$$

であることからわかる．そこで $\phi(x, y)$ を

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sin y,\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 1 + x\cos y$$

が成り立つように定めたい．第１式を x について積分して

$$\phi(x, y) = x\sin y + g(y) \ (g(y) \text{ は } y \text{ のみによる関数})$$

が得られる．これを第２式に代入すると

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}\left(x\sin y + g(y)\right) = 1 + x\cos y \\ &\Rightarrow\ x\cos y + g'(y) = 1 + x\cos y \end{aligned}$$

が得られる．これより $g'(y) = 1$ が従い，$g(y) = y + C$ (C は任意定数) がわかる．よって $\phi(x, y) = x\sin y + y + C$ とおけて，求める解は

$$x\sin y + y = C_1 \ (C_1 \text{ は任意定数})$$

となる．

9) クレロー型の方程式．この式の両辺を x で微分して

$$\begin{aligned} &y' = y' + xy'' + 2y'y'' \\ &\Rightarrow\ (x + 2y')y'' = 0 \end{aligned}$$

が得られる．このことから

$$x + 2y' = 0 \text{ または } y'' = 0$$

が従う．第２式からは $y(x) = c_1 x + c_2$ (c_1, c_2 は任意定数) とおけることがわかる．この式をもとの式 $y = xy' + y'^2$ に代入すると

$$c_1 x + c_2 = xc_1 + c_1^2 \ \Rightarrow\ c_2 = c_1^2$$

が得られ、結局第２式から微分方程式の解 $y(x) = Cx + C^2$ (C は任意定数) を得る．また第１式 $x + 2y' = 0$ について，これを y' について解いた $y' = -\frac{1}{2}x$ を問題の式 $y = xy' + y'^2$ に代入して

$$y = x\left(-\frac{1}{2}x\right) + \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 \ \Rightarrow\ y = -\frac{1}{4}x^2$$

を得る．こうして得られた $y(x) = -\frac{1}{4}x^2$ も解である．

　よって解は $y(x) = Cx + C^2$, $y(x) = -\frac{1}{4}x^2$ である．

10) クレロー型の方程式．この式の両辺を x で微分して

$$y' = y' + xy'' - y''e^{y'}$$
$$\Rightarrow (x - e^{y'})y'' = 0$$

が得られる．よって

$$x - e^{y'} = 0 \text{ または } y'' = 0$$

が従う．第 2 式から $y(x) = c_1x + c_2$ (c_1, c_2 は任意定数) とおけることがわかる．この式を問題の式に代入すると

$$c_1x + c_2 = xc_1 - e^{c_1} \ \Rightarrow \ c_2 = -e^{c_1}$$

が得られ，結局第 2 式から微分方程式の解 $y(x) = Cx - e^C$ (C は任意定数) を得る．

また第 1 式 $x - e^{y'} = 0$ について、これを y' について解いた $y' = \log x$ を問題の式 $y = xy' - e^{y'}$ に代入して

$$y = x\log x - x$$

が得られる．こうして得られた $y(x) = x\log x - x$ も解である．

よって解は $y(x) = Cx - e^C,\ y(x) = x\log x - x$ である．