２０１６年度数理科学基礎II（理I 6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題 7　2016/5/27（金）

問 7.1. $A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つことを確かめよ．また，右辺のそれぞれの行列が定める線型変換の意味と，それらを（適切な順番に）続けて行うと，A の定める線型変換が得られることを確かめよ.

2) 等式 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，1) と同様のことを確かめよ.

問 7.2 (問 5.8 も参照のこと). 方向ベクトルを $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ とし，原点を通る直線に関する鏡映を r_θ で表す.

1) r_θ の表現行列を A とすると，$\det A = -1$ が成り立つことを示せ.

2) $r_\varphi \circ r_\theta$ は原点を中心とする $2(\varphi - \theta)$ 回転であることを,

 i) 表現行列を用いて,

 ii) 幾何的に

それぞれ示せ．なお，ii) は全ての場合を尽くそうと思うと結構面倒である.

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．$v \neq o$ ならば $r = \|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ とすると $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して $v = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ が成り立つ．θ の範囲を例えば $[0, 2\pi)$ に限れば θ は一意的である．$v = o$ の時には θ は定まらないが，$r = \|v\|\,(= 0)$ とすれば $v = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ 自体は成り立つ．$\mathbb{R}^2$ の点のこのような表示を**極座標**表示などと呼ぶのであった．また，$\mathbb{R}^2$ を複素平面（ガウス平面）$\mathbb{C}$ と考えたとき，$v \in \mathbb{R}^2$ が $z \in \mathbb{C}$ に対応するのであれば，$z = re^{\sqrt{-1}\theta}$ が成り立つのであった．このような表示は $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ についても考えることができる．ここでは $n = 3$ の時を扱う.

問 7.3. $\mathbb{R}^3$ を xyz-空間と考え，$\mathbb{R}^3$ の点を $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ で表す.

1) z 軸を軸として，x 軸を y 軸方向に φ だけ回転させる変換を g_φ とすると,

$$g_\varphi(v) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v$$

が成り立つことを示せ.

2) y 軸を軸として，z 軸を x 軸方向に θ だけ回転させる変換を f_θ とすると，

$$f_\theta(v) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} v$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：まず zx-平面上の回転を考え，それを xz-座標に書き直す（座標の順番を入れ替える）と混乱が少ないかも知れない（が，却って混乱が深まるかも知れない）．

3) $\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)$ について，$g_\varphi \circ f_\theta$ がどのような $\mathbb{R}^3$ の線型変換を与えるか考えよ．いくつかの代表的なベクトル（例えば e_1, e_2, e_3 など）の像を考えるのが良い．

問 7.4. 問 7.3 の記号をそのまま用いる．

1) $H = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \geq 0\}$ と置く．H は $\mathbb{R}^3$ に含まれる zx-平面の上半分である．H を z 軸の周りに回転させると $\mathbb{R}^3$ 全体になることを確かめよ．

2) $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とする．

a) $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ とすると，$\varphi \in [0, 2\pi)$ が存在して $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cos\varphi \\ s\sin\varphi \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

※ $s = 0$ の場合には φ を自然に定めることはできない．

b) $w = g_{-\varphi}(v)$ と置く．$w \in H$ が成り立つことを示せ．

c) $\|w\| = \|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ が成り立つことを示せ．

d) $r = \|v\|$ と置く．$\theta \in [0, \pi]$ が存在して $w = f_\theta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}\right)$ が成り立つことを示せ．

e) $v = g_\varphi \circ f_\theta\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．また，v が z 軸上になければ，θ, φ は一意的に定まることを示せ．

※ 上で述べたような r, θ や φ の定め方を用いて示すのは難しい．というのは，ここで考えた方法とは全く異なる方法で r, θ や φ をつじつまが合うように定めることができる可能性を排除しにくいからである．実際には（表向き）二通りに書けたとして，結局同じことになる，ということを示すのが簡明である．

問 7.5 *. $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$F(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

により定める[1]．また，

$$DF(r,\theta,\varphi)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r}r\sin\theta\cos\varphi & \dfrac{\partial}{\partial\theta}r\sin\theta\cos\varphi & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}r\sin\theta\cos\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r}r\sin\theta\sin\varphi & \dfrac{\partial}{\partial\theta}r\sin\theta\sin\varphi & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}r\sin\theta\sin\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r}r\cos\theta & \dfrac{\partial}{\partial\theta}r\cos\theta & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}r\cos\theta \end{pmatrix}$$

と置く（これは DF の一般的な定義の特別な場合である）．

1) DF を具体的に求めよ．

2) $A=(a_{ij})\in M_3(\mathbb{R})$ について

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

が成り立つ[2]．このことを認めて $\det DF(r,\theta,\varphi)$ を求めよ．

注． 問 7.4 のように，$\mathbb{R}^3$ の点を（z-軸上の点に関しては今ひとつうまく行かないが，それは良いことにして）長さと二つの角度で表す方法を（球面）**極座標表示**と呼ぶ．ここでは $\begin{pmatrix}0\\0\\r\end{pmatrix}$ を，まず y 軸の周りに回転させ，次いで z 軸の周りに回転させているが，軸の選び方は目的に応じて変わる．問 7.3 と 7.4 で x 軸，y 軸，z 軸をそれぞれ z 軸，x 軸，y 軸に置き換えれば出発点のベクトルは $\begin{pmatrix}0\\r\\0\end{pmatrix}$ であって，極座標は $v=\begin{pmatrix}r\sin\theta\sin\varphi\\r\cos\theta\\r\sin\theta\cos\varphi\end{pmatrix}$ で与えられる．極座標は $n\geq 4$ の場合の $\mathbb{R}^n$ についても定まり，例えば $\mathbb{R}^n$ 上の函数の積分を考えるときに有用である．これについての詳しいことは「微分積分学」で扱う．

問 7.6 ***．三角函数と双曲線函数は異なるが，似た性質を持つ．このことにはいろいろな説明を付けることができるが，ここでは図（グラフ）に着目して次のように考えてみる[3]．以下では $\mathbb{R}^2$ の点 ${}^t(x,y)$ を単に (x,y) で表す．

まず，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に $\mathbb{R}^3$ の点 $(x,y,1)$ を対応させることにする．これは全単射である．$(u,v)\in\mathbb{R}^2$ に $\mathbb{R}^3$ の点 $(1,u,v)$ を対応させることにする．これも全単射である．ここで，$(x,y,1)$ と $(1,u,v)$ について，ある $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在して $(x,y,1)=\lambda(1,u,v)$ が成り立つとき，そのときのみ (x,y) と (u,v) は同一であると考えることにする．例えば $(x,y)=(1/2,1/2)$ であって，$(u,v)=(1,2)$

[1] F の定義域として念頭にあるのは $\mathbb{R}\times[0,\pi]\times[0,2\pi)\subset\mathbb{R}^3$ であるが，実際には $\mathbb{R}^3$ 全体である．

[2] これは定義では無く，$n=3$ の場合の計算結果である．実際には，一般に $M_n(K)$ の元 A に対して**行列式** $\det A$ が一定の方法で定まる．なお，$n\geq 4$ の場合にはこのような簡単な式は無い．行列式については「線型代数学」で比較的早い段階で扱う予定であるが，冬学期になるかも知れない．

[3] 外には，例えば講義で扱ったようにテーラー展開に着目するなどの方法がある．

ならば $(1/2,1/2,1)=(1/2)(1,1,2)$ が成り立つので (x,y) と (u,v) は同じと考える（xy-平面と uv-平面は区別して別の物と考えていることに注意）．

1) (u,v) が (x,y) と同一視されるのは，$x\neq 0$ であって，かつ $(u,v)=\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{1}{x}\right)$ が成り立つとき，その時のみであることを示せ．
2) 円周 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2=1\}$ の点は $x\neq 0$ ならば双曲線 $\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,|\,u^2-v^2=-1\}$ の点に対応することを示せ．

3^{****}) 2) において $x=0$ の場合にはどのように考えるのが自然であるか考えよ．もし位相について知っていれば，単に「図」の自然性ではなく，位相的に自然な理解について考えよ．

定義 7.7. $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を n 変数の $\mathbb{R}^m$-値函数（ベクトル値函数）とする．$x\in\mathbb{R}^n$ とすると，$f(x)\in\mathbb{R}^m$ であるから，$f(x)=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_m\end{pmatrix}$ と表すことができる．ここで，$x\in\mathbb{R}^n$ が与えられると（$f(x)$ の第 i 成分として）w_i が定まる，と考えることにすると，x に $w_i\in\mathbb{R}$ を与える対応，つまり実数値函数が得られる．この函数を f_i で表すことにし，f の**第 i 成分**と呼ぶことにする．定義により

$$f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ \vdots\\ f_m(x)\end{pmatrix}$$

が成り立つ．

問 7.8. $x\in\mathbb{R}^n$ を $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ と成分で表す．また，$f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を n 変数の函数とし，実際には $x_1,\ldots,x_n$ の多項式であるとする．

1) ある $a\in M_{1,n}(\mathbb{R})$ と，対称行列 $B\in M_n(\mathbb{R})$，3 次以上の多項式 g が存在して
$$f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)=f(o)+ax+\frac{1}{2}{}^t xBx+g(x)$$
が成り立つことを示せ．
2) $Df(x)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)\ \cdots\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$ と定める．$Df(o)=a$ が成り立つことを示せ．

3) $Hf(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(x) \end{pmatrix}$ と定める（Hf は f の**ヘシアン**（ヘッセ行列）と呼ばれる）．$Hf(o) = B$ が成り立つことを示せ．

問 7.9. $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を n 変数の $\mathbb{R}^m$-値函数（ベクトル値函数）とし，$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$ と成分を用いて表す．また，$f\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ を l 変数の $\mathbb{R}^n$-値函数とし，$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ と成分を用いて表す．ここで g_i 達は $y_1, \ldots, y_n$ の多項式，f_j 達は $x_1, \ldots, x_l$ の多項式とする．

1) ある $v \in \mathbb{R}^n$ と $A \in M_{n,l}(\mathbb{R})$ が存在して，

$$f(x) = v + Ax + (x_i \text{ 達の 2 次以上の多項式})$$

が成り立つことを示せ．同様に，$w \in \mathbb{R}^m$ と $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ が存在して，

$$g(y) = w + By + (y_j \text{ 達の 2 次以上の多項式})$$

が成り立つことを示せ．

2) $f(o_l) = o_n,\ g(o_n) = o_m$ とする．

$$g \circ f(x) = BAx + (x_i \text{ 達の 2 次以上の多項式})$$

が成り立つことを示せ．

※ 線型写像の合成写像との類似に注意せよ．

3) 一般に

$$g \circ f(x) = w + Bv + BAx + (x_i \text{ 達の 2 次以上の多項式})$$

が成り立つことを示せ．

※ アフィン写像の合成写像との類似に注意せよ．

問 7.8 のように，実数値函数を考えたり，問 7.9 のように一次以下の項だけを問題にするのであれば行列やベクトルが有効であった．$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像を扱い，かつ二次以上の項も問題にしようとするとある意味で「行列」であるが，もっと複雑なものが必要になる．

問 7.10 ****.** 問 7.9 の記号をそのまま用いる．また，$A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij}),\ v=(v_i),\ w=(v_i)$ とする．

1) $1 \leq j \leq n,\ 1 \leq r,s \leq l$ について $h_{j;rs} \in \mathbb{R}$ が存在して

$$f_j(x) = v_j + \sum_{k=1}^{l} a_{jk}x_k + \frac{1}{2}\sum_{1\leq r,s\leq l} h_{j;rs}x_rx_s + (x_i \text{ 達の 3 次以上の多項式})$$

が成り立つことを示せ．また，$h_{j;rs}$ は $h_{j;sr}=h_{j;rs}$ が成り立つように取れることを示せ．
※ j を固定して，r が行，s が列を指定していると考えて $H_j=(h_{j;rs})_{rs}$ と置けば H_j は l 次の（実）対称行列である．

2) $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq t,u \leq n$ について $\overline{h}_{i;tu} \in \mathbb{R}$ を

$$g_i(y) = w_i + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}y_k + \frac{1}{2}\sum_{1\leq t,u\leq n} \overline{h}_{i;tu}y_ty_u + (y_i \text{ 達の 3 次以上の多項式}),$$

$\overline{h}_{i;tu} = \overline{h}_{i;ut}$ が成り立つように定める．また，$1 \leq i \leq m,\ 1 \leq \alpha,\beta \leq l$ について $p_i, c_{ij}, \widetilde{h}_{i;\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ を

$$g_i \circ f(x) = p_i + \sum_{k=1}^{l} c_{ik}x_k + \frac{1}{2}\sum_{1\leq \alpha,\beta\leq l} \widetilde{h}_{i;\alpha\beta}x_\alpha x_\beta + (x_i \text{ 達の 3 次以上の多項式}),$$

$\widetilde{h}_{i;\alpha\beta} = \widetilde{h}_{i;\beta\alpha}$ が成り立つように定める．

a) $f(o_l)=o_n,\ g(o_n)=o_m$ とする．この時，

$$\widetilde{h}_{i;\alpha\beta} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}h_{j;\alpha\beta} + \sum_{1\leq t,u\leq n} \overline{h}_{i;tu}a_{t\alpha}a_{u\beta}$$

が成り立つことを示せ．

b) 一般には

$$\widetilde{h}_{i;\alpha\beta} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}h_{j;\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sum \overline{h}_{i;tu}v_th_{u;\alpha\beta} + \sum_{1\leq t,u\leq n} \overline{h}_{i;tu}a_{t\alpha}a_{u\beta} + \frac{1}{2}\sum_{1\leq t,u\leq n} \overline{h}_{i;tu}h_{t;\alpha\beta}v_u$$

が成り立つことを示せ．

問 7.10 に現れた $h_{j;rs}$ などは**テンソル**と呼ばれる,「行列もどき」と関係が深い（$h_{j;rs}$ 自体は通常の意味でのテンソルではない）．

これ以降は本格的には「線型代数学」で扱う．その意味では予習であるが，解くのに必要な技術的ことはここまでの講義で済ませてある．一方，考え方についてはまだ余り述べていないので今すぐ解けなくとも慌てなくて良い（が，例えば S2 ターム末が終わっても「???」だとちょっとまずい）．

問 7.11. $v,w \in K^n,\ v,w \neq o$ とする．

1) $n=2$ とする．v と w が平行でなければ，任意の $u \in \mathbb{R}^2$ について，$\lambda, \mu \in K$ が一意的に存在して $u = \lambda v + \mu w$ が成り立つことを示せ．

2) $n \geq 3$ とすると，ある $u \in \mathbb{R}^n$ について $u = \lambda v + \mu w$ と表すことができないことを示せ．

問 7.12. V を K-線型空間とする（難しければ最初は $V = K^n$ と考えてみよ）．$v_1, \ldots, v_r \in V$ とし，これらは条件

> $w \in V$ について，$w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$, $\lambda_1 \ldots, \lambda_r \in K$，と表すことができるのであれば，$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ は一意的である．

を満たすとする[4]．この条件は

> $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = o$, $\lambda_1 \ldots, \lambda_r \in K$，が成り立つのであれば $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$ が成り立つ．

ことと同値であることを示せ．この同値な条件が成り立つことを，$v_1, \ldots, v_r$ は K-上**線型独立（一次独立）**であるという．$v_1, \ldots, v_r$ が線型独立でないことを**線型従属（一次従属）**であるという．

問 7.13. K^n の基本ベクトル $e_1, \ldots . e_n$ は線型独立であることを示せ．

問 7.14. $v_1, \ldots, v_r \in V$ とする．

1) ある i について，v_i が $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r$ の線型結合として表されるのであれば，$v_1, \ldots, v_r$ は線型独立ではないことを示せ．

2) $v_1, \ldots, v_r$ が線型従属であることと，ある $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ であって，いずれかの λ_i は 0 ではなく，$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = o$ が成り立つことは同値であることを示せ．

3) 1) の逆が成り立つことを示せ．

問 7.15.

1) $v_1, \ldots, v_r \in K^n$ とする．$v_1, \ldots, v_r$ が線型独立であることと，$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ に関する方程式
$$(v_1 \ \cdots \ v_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = o$$
の解が $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$ のみであることは同値であることを示せ．

2) $A = (a_1 \ \cdots \ a_n) \in M_{m,n}(K)$ とし，$f \colon K^n \to K^m$ を $f(v) = Av$ により定める．$a_1, \ldots, a_n \in K^m$ が線型独立であることと，f が単射であることは同値であることを示せ．

問 7.16. $v_1, \ldots, v_r \in V$ は線型独立であるとする．これら r 個のベクトルから任意の s 個を（重複の無いように）選び，$w_1, \ldots, w_s$ とする．このとき，$w_1, \ldots, w_s$ は線型独立であることを示せ．

---

[4] そもそも w は $v_1, \ldots, v_r$ の線型結合として表せないかも知れないが，表せるかどうかは問題にしていない．あくまで,「もし表せるのであれば〜」という話である．

問 7.17. $A \in M_{m,n}(K)$ とする．

1) $\lambda \in K,\ \lambda \neq 0$ とし，A の第 i 行を λ 倍する．
2) $i \neq j$ とし，A の第 i 行と第 j 行を入れ替える．
3) $i \neq j,\ \mu \in K$ とし，A の第 i 行に第 j 行の μ 倍を加える．

の操作は，それぞれ A にある正則な行列を掛けることに対応する．例えば 1) に関して言えば，ある行列 $P(\lambda) \in \mathrm{GL}_m(K)$ が存在して，$P(\lambda)A$ は A の第 i 行を λ 倍した物となる．このような行列を求めよ（任意の n と任意の $A \in M_{m,n}(K)$ について成り立つようにしようとすると，それぞれ一意的に定まる）．また，それぞれの操作は可逆な操作で，しかも 1) から 3) の操作を用いて記述できる．このことを確かめよ．

これらの操作を**行基本変形**あるいは**左基本変形**と呼ぶ．

定義 7.18. $C \in M_{m,n}(K)$ とし，$C = (c_1\ \cdots\ c_n)$ と列ベクトルを用いて表す．また，$e_1, \ldots, e_m$ を K^m の基本ベクトルとする．$C = O$ であるか，あるいは $C \neq O$ が以下を満たすとき，C を**行階段行列**（正確には既約行階段行列）と呼ぶ：$1 \leq j_1 < \cdots < j_r$ が存在して，

1) $c_{j_k} = e_k$ が成り立つ．
2) $c_{j_k+1}, \ldots, c_{j_{k+1}-1}$ は $e_1, \ldots, e_k$ の線型結合として表すことができる．

なお，$C = O$ の場合には $r = 0$ として j_i 達は考えない，としてもよい．また，$j_k + 1 = j_{k+1}$ の場合には条件 2) は無視する．

問 7.19. $A \in M_{m,n}(K)$ とする．A に左基本変形（問 7.17 の 1) から 3) の操作）を適当に（適切に）施すと，A は行階段行列に直せることを示せ．

実は得られる行階段行列は A により定まる．このことは後日示す．

問 7.20. $A \in M_{m,n}(K),\ w \in K^m$ を用いて $Av = w$ で与えられる $v \in K^n$ に関する方程式を考える．$(A\ w)$ に左基本変形を施すことは，$Av = w$ を v の成分に関する連立一次方程式とみなした場合どのような操作に対応するか考えよ．

（以上）