２０１６年度数理科学基礎II（理I 6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題 2　2016/4/15（金）
'16/4/22：問 2.11 の arccosh の範囲と arctanh に関する式を訂正.

以下ではテーラー展開の中心は 0 とする（マクローリン展開を考える）.

問 2.1. 1) exp のテーラー展開を項別に（項毎に）微分すると再び exp のテーラー展開が得られることを確かめよ.

2) sin のテーラー展開を項別に微分すると，cos のテーラー展開が得られることを確かめよ.

なお，本当はこのような操作を行って良いかどうかは函数に依る．どのようなときに行って良いかは「微分積分学」で扱う.

問 2.2. $\sec\theta,\ \csc\theta,\ \cot\theta$ を $e^{\sqrt{-1}\theta},\ e^{-\sqrt{-1}\theta}$ を用いて表せ.

問 2.3. 実際に微分すれば分かるように $\dfrac{d^2}{dx^2}\sin x = -\sin x$ 及び $\dfrac{d^2}{dx^2}\cos x = -\cos x$ が成り立つ.

1) このことを，$\sin x,\ \cos x$ のテーラー展開を項別に微分することにより確かめよ.

2) このことを，オイラーの公式を微分することにより確かめよ.

なお，これらが実際に証明になっていることは「微分積分学」で扱う.

問 2.4. $z \in \mathbb{C}$ について $z = x + \sqrt{-1}y,\ x, y \in \mathbb{R}$ と表して $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ あるいは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を対応させると何かと都合が良いのであった．ここでは前者に着目する．オイラーの公式と，$\sqrt{-1}\theta$ に $\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ が対応することを踏まえて，$A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ として

$$\exp A = E_2 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}A^n$$

と定める．但し，$A^0 = E_2$ とする[1]．形式的に (収束などを気にせず) 右辺を計算すると $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が得られることを確かめよ（この行列は $\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ に対応するのであった）．例によって，この計算が「正しい」ことは「微分積分学」で扱う.

問 2.5. $\exp\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ を $\cosh x, \sinh x$ を用いて表せ.

問 2.6. $x \in \mathbb{R}$ について $\cosh x \geq 1$ 及び $-1 < \tanh x < 1$ が成り立つ事を示せ.

定義 2.7. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が**偶函数**であるとは，$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$ が成り立つことを言う．また，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が**奇函数**であるとは，$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$ が成り立つことを言う.

[1] $\exp A$ は一般の $A \in M_2(\mathbb{R})$，さらには $A \in M_n(K)$ について定義され，**行列の指数函数**と呼ばれる．ただし，A が一般の場合には $\exp A$ は複素数と関係ある場合もあるし，ない場合もある.

問 2.8. $\sin, \sinh, \tan, \tanh$ は奇函数であることを示せ．また，$\cos, \cosh$ は偶函数であることを示せ．

問 2.9. $\sin$ などと同様に，例えば $\cosh^2 x = (\cosh x)^2$ と定める．$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ が成り立つことを，

1) 定義から直接示せ，また，
2) 微分方程式を用いて示せ．ただし，$\dfrac{dy}{dx} = 0$ の解は $y = c$（定数）で与えられることは認めて良い．

また，$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ が成り立つことについても，オイラーの公式と，微分方程式を用いる方法それぞれにより確かめよ．

問 2.10 ***.** 双曲線函数は三角函数と異なり周期的でない．つまり，$p \in \mathbb{R}$ について

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sinh x = \sinh(x+p)$$

が成り立つならば $p = 0$ が成り立つことを示せ．同様のことを $\cosh, \tanh$ についても示せ．

問 2.11. 逆三角函数などの微分に関して，次が成り立つことを示せ．ただし，$\arcsin$ の値は $\left[-\dfrac{1}{2}\pi, \dfrac{1}{2}\pi\right]$，$\arccos$ の値は $[0, \pi]$，$\mathrm{arccosh}(= \mathrm{arcosh})$ の値は $[0, +\infty)$，を取るとして考える：

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\arcsin t &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}},\ (-1 < t < 1),\\
\frac{d}{dt}\arccos t &= -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},\ (-1 < t < 1),\\
\frac{d}{dt}\arctan t &= \frac{1}{1+t^2},\\
\frac{d}{dt}\mathrm{arcsinh}\, t &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\\
\frac{d}{dt}\mathrm{arccosh}\, t &= \frac{1}{\sqrt{-1+t^2}},\ (1 < t)\\
\frac{d}{dt}\mathrm{arctanh}\, t &= \frac{1}{1-t^2},\ (-1 < t < 1).
\end{aligned}$$

問 2.12. 1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ を求めよ．

2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ を求めよ．

なお，積分は高校までの要領で求めれば良い．詳しいことは「微分積分学」で扱う．

（以上）