２０１６年度数理科学基礎 II（理 I 6,7,9,10 組向け，足助担当）　演習問題 1　2016/4/8（金）

講義で配布する演習問題全般に関する注意．

- 問題の並びは難易度の順にも，講義で扱った（扱う）順にも一致していない．
- あくまで演習問題であって期末試験やターム末試験の事前公開ではない．また，数理科学基礎演習とは内容の上では直接的に関連するが，この演習問題を数理科学基礎演習で用いることは原則としてない．特に打ち合わせているわけではないので問題が重複したり，類似のものがあったりするかも知れないが，そのような問題は大切であったり，典型的な問題であることが多い．
- ヒントを時々附した．多くの場合ヒントは非自明なことから成る．このような場合にはヒントの内容を無条件で認めるのではなく，必ず証明も考えること．
- 「$*$」が付いている問はやや難しい．数が増えれば増えるほど難しい．
- S2 ターム以降の線型代数学についてもほぼ同様である．

問 1.1. $\mathbb{Q}[x] \subsetneq \mathbb{R}[x] \subsetneq \mathbb{C}[x]$ が成り立つことを示せ．

注. x と t が独立な変数（関係[1]のない変数）であるならば $\mathbb{R}[x] \cap \mathbb{R}[t] = \mathbb{R}$ である．つまり，素朴に「$1+x$ と $1+t$ は変数が異なるから，そもそも異なる多項式である」と考える．

問 1.2****.** $\mathbb{R}[t]$ を真似て，

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[t,s] &= \{t, s \text{ を変数とする，実数を係数とする多項式全体}\} \\ &= \{a_{00} + a_{10}t + a_{01}s + a_{11}ts + \cdots + a_{mn}t^m s^n \mid \exists\, m, n \in \mathbb{N},\ \exists\, a_{ij} \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

と置く（$\mathbb{R}[t,s]$ は $\mathbb{R}$ 上の二変数多項式環と呼ばれる）．$(\mathbb{R}[t])[s] = \mathbb{R}[t,s]$ が成り立つことを示せ．なお，左辺は単に $\mathbb{R}[t][s]$ と表されることも多い．

多変数（変数が二つ以上）の多項式は，テーラー展開を考える際などに重要である．線型代数でも最後の方に二次形式として多変数の二次式が現れる．

問 1.3. 代数学の基本定理は $\mathbb{R}$ や $\mathbb{Q}$ に関しては成り立たない．実際，$f(x) = x^2 + 1$ とすると，$f \in \mathbb{Q}[x]$ であるが，$x \in \mathbb{R}$ ならば $f(x) > 0$ が成り立つ．特に方程式 $f(x) = 0$ は $\mathbb{R}$ に（$\mathbb{R}$ の範囲で）解を持たない．

1) 上の議論で，直接的には主張

   ある $f \in \mathbb{Q}[x]$ について方程式 $f(x) = 0$ は $\mathbb{R}$ に解を持たない

   が示されていることを確かめよ．

2) 上の主張から

   a) $f \in \mathbb{R}[x]$ であっても方程式 $f(x) = 0$ が $\mathbb{R}$ に解を持つとは限らない．

   b) $f \in \mathbb{Q}[x]$ であっても方程式 $f(x) = 0$ が $\mathbb{Q}$ に解を持つとは限らない．

   の双方が従うことを確かめよ．

問 1.4. $z \in \mathbb{C}$ とする．

1) $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ が成り立つことを示せ．

[1]例えば $x = t^2$ といったような．

2) $x \in \mathbb{R}$ とする．$x \in \mathbb{C}$ とみなして得られる絶対値 $|x|$ は，x を実数とみなして得られる絶対値と一致することを示せ．

3) $z \neq 0$ とし，$z = |z|\, e^{\sqrt{-1}\theta}$ を z の極形式による表示とする．このとき，$\bar{z}$ 及び z^{-1} の極形式による表示を求めよ．

以下では次のような記号を用いる（一般的な物ではなく，ここでの記号である）．

記号 1.5. $z \in \mathbb{C}$ とし，$z = x + \sqrt{-1}y,\ x, y \in \mathbb{R}$，と表す．

1) $v_z \in \mathbb{R}^2$ を，$v_z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と置くことにより定める．

2) $A_z \in M_2(\mathbb{R})$ を $A_z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ と置くことにより定める．

問 1.6. $w, z \in \mathbb{C}$ とすると，$v_{wz} = A_w v_z$ が成り立つことを示せ．
※ 記号がややこしいだけで，やること自体は難しくない．

問 1.7. $z \in \mathbb{C}$ とし，$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f(v) = A_z v$ により定める．

1) $z \in \mathbb{R}$ であるとき，f がどのような写像であるか考察せよ．

2) z が純虚数である（実部が 0 に等しい）とき，f がどのような写像であるか考察せよ．

3) $z = e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta,\ \theta \in \mathbb{R}$，であるとき，$f$ がどのような写像であるか考察せよ．

定義 1.8. $K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とする．$A = (a_{ij}) \in M_2(K)$ について $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ と定め，A の**行列式**と呼ぶ．

行列の行列式は任意の正方行列について定まる．これについては後日扱う．

定義 1.9 (講義でも後日扱う)**.** $A \in M_{m,n}(K)$ とする．また，A の (i, j) 成分を a_{ij} とする．

1) $M_{n,m}(K)$ の元であって，(i, j) 成分が a_{ji} であるものを A の**転置行列**と呼び，${}^tA$ で表す．

2) $m = n$ とする．$B \in M_n(K)$ が A の**逆行列**であるとは，$AB = BA = E_n$ が成り立つことを言う．A の逆行列は存在すれば一つなので A^{-1} で表す．

問 1.10. $z \in \mathbb{C}$ とする．

1) $\det A_z \geq 0$ が成り立つことを示せ．また，$|z| = \sqrt{\det A_z}$ が成り立つことを示せ．

2) $z \in \mathbb{C}$ とする．$A_{\bar{z}} = {}^tA_z$ が成り立つことを示せ．

3) $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$ とする．$A_z A_{z^{-1}} = A_{z^{-1}} A_z = E_2$ が成り立つことを示せ（従って $A_{z^{-1}} = A_z^{-1}$ が成り立つ）．また，$A_z^{-1} = \dfrac{1}{\det A_z}{}^tA_z$ が成り立つことを示せ[2]．

4) $r = |z| = \sqrt{\det A_z}$ と置き，$r \neq 0$ と仮定する．また，$R = \dfrac{1}{r}A_z$ と置く．

[2]一般の正方行列に関しても類似の式が成り立つ．これに関しては線型代数学で扱う（余因子行列などが現れる）．

a) $\det R = 1$ が成り立つことを示せ．

b) ある $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．また，$z' = \dfrac{z}{r}$ とすると $R = A_{z'}$ が成り立つことを示せ．

c) $P = rE_2 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ と置く．この時，$A_z = PR = RP$ が成り立つことを示せ．

5) 一般の $z \in \mathbb{C}$ について，$f(v) = A_z v$ により定まる $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像がどのような物であるか考察せよ．

ヒント：z の極形式による表示に着目するのが良い．

複素数と行列の関係についてからは一旦離れ，複素数と多項式の関係について調べる．

問 1.11 ****.** 1) $f \in \mathbb{C}[x]$ とする．f の係数の全てについて，複素共役を取って得られる多項式を $\bar{f}$ とする．即ち，$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ であるとき，$\bar{f}(x) = \overline{a_0} + \overline{a_1} x + \cdots + \overline{a_n} x^n$ と定める．このとき，$f(\sqrt{-1}) = 0$ が成り立つことと，$\bar{f}(-\sqrt{-1}) = 0$ が成り立つことは同値であることを示せ．

2) $f \in \mathbb{R}[x]$ とする．$f \in \mathbb{C}[x]$ とみなして x に $\sqrt{-1}$ を代入したとき 0 になるようなもの全体のなす集合を I で表す．即ち，

$$I = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(\sqrt{-1}) = 0\},$$

但し $f(\sqrt{-1})$ は $f \in \mathbb{C}[x]$ とみなして定める，と置く．$f \in I$ であることと，f が $x^2 + 1$ で割り切れることは同値であることを示せ．

3) $f \in \mathbb{R}[x]$ について，x^2 を全て -1 に置き換えて得られる高々一次の多項式を $[f]$ とする[3]．例えば $f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3$ ならば，$[f](x) = 1 + x + 2(-1) + 3x(-1) = -1 - 2x$ である．

a) $f, g \in \mathbb{R}[x]$ について $[f + g] = [f] + [g]$ 及び $[fg] = [[f][g]]$ が成り立つことを示せ．

b) $[f] = a + bx$ であるとき，複素数 z_f を $z_f = a + \sqrt{-1}b$ により定める．$\mathbb{R}_1[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f$ は x を変数とする，高々 1 次の多項式 $\}$ とする[4]と，$f \in \mathbb{R}_1[x]$ に $z_f \in \mathbb{C}$ を与える写像は $\{[f] \mid f \in \mathbb{R}[x]\}$ と $\mathbb{C}$ の間の全単射であることを示せ．また，$z_{f+g} = z_f + z_g$，$z_{fg} = z_f z_g$ が成り立つことを示せ．

複素数と行列の関係に戻る．

問 1.12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする．

1) $\forall z \in \mathbb{C},\ v_{\bar{z}} = A v_z$ が成り立つことを示せ．また，$B \in M_2(\mathbb{R})$ について $\forall z \in \mathbb{C},\ v_{\bar{z}} = B v_z$ が成り立つならば $B = A$ が成り立つことを示せ．

---

[3]既にイデアルについて知っている者への注意．I は $x^2 + 1$ で生成される $\mathbb{R}[x]$ のイデアルであって，$\mathbb{R}[x]/I$ を考えている．f の属する同値類の代表元で，高々一次であるものをここでは $[f]$ で表している．通常は $[f]$ で f の属する同値類そのものを表すので，ここでの記号は本当は良くない．

[4]この記号はある程度用いられるが，必ずしも一般的とは言えないので，用いるのであればその都度断るのが無難である．

2) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f(v) = Av$ により定める．f がどのような写像であるか，簡潔に述べよ．

3) $\nexists z \in \mathbb{C},\ A = A_z$ が成り立つ，即ち，$A = A_z$ が成り立つような $z \in \mathbb{C}$ は存在しないことを示せ．

定義 1.13. $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ について，

$$\langle v \,|\, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

と置き，v と w の**内積**と呼ぶ（高校まででは $v \cdot w$ と表していた物と同一である）．

内積は K^n の元について定まる．また，転置行列や随伴行列との関連が深い．これらについては後日（恐らく A セメスターで）扱う．

問 1.14. $z \in \mathbb{C}$ とする．

1) $\forall v, w \in \mathbb{R}^2,\ \langle A_z v \,|\, A_z w \rangle = (\det A_z) \langle v \,|\, w \rangle$ が成り立つことを示せ．

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，$v, w \in \mathbb{R}^2$ について $\langle Av \,|\, Aw \rangle = (\det A) \langle v \,|\, w \rangle$ は必ずしも成り立たないことを示せ（なお，$\det A = 1$ である）．

※ 従って，$\forall v, w \in \mathbb{R}^2,\ \langle Av \,|\, Aw \rangle = (\det A) \langle v \,|\, w \rangle$ が成り立つかどうかは A に依る．

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする（問 1.12 も参照のこと）と，$\forall v, w \in \mathbb{R}^2,\ \langle Av \,|\, Aw \rangle = \langle v \,|\, w \rangle$ が成り立つことを示せ．

問 1.15. $A \in M_2(\mathbb{R})$ とし，$\forall v, w \in \mathbb{R}^2,\ \langle Av \,|\, Aw \rangle = \langle v \,|\, w \rangle$ が成り立つとする．

1) $\det A > 0$ であれば，ある $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ（従って $\det A = 1$ が成り立つ）．

2) $\det A < 0$ であれば，ある $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ（従って $\det A = -1$ が成り立つ）．また，$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f(v) = Av$ により定めると f はどのような写像であるか，簡潔に述べよ．

3) $A \in M_2(\mathbb{R})$ とする．$\forall v, w \in \mathbb{R}^2,\ \langle Av \,|\, Aw \rangle = 0$ が成り立つならば $A = O_2$ であることを示せ．

4*) $A \in M_2(\mathbb{R})$ とし，$\det A \neq 0$ とする．更に，$\forall v, w \in \mathbb{R}^2,\ \langle Av \,|\, Aw \rangle = |\det A| \, \langle v \,|\, w \rangle$ が成り立つとする．このとき，

$$\exists\, z \in \mathbb{C},\ A = A_z$$

あるいは

$$\exists\, z \in \mathbb{C},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A = A_z$$

の一方が，また一方のみが成り立つことを示せ．

ヒント：まず $B = \dfrac{1}{\sqrt{\det A}} A$ として $\langle Bv \,|\, Bw \rangle$ を考えてみよ．

（以上）