２０１６年度線型代数学（理Ｉ6,7,9,10 組向け，足助担当）　演習問題　　2017/1/12（木）

§ 二次形式の標準形に関する補足.

定理 17.1 (Lagrange の方法). f を V 上の二次形式（$K=\mathbb{R}$ の場合）あるいはエルミート二次形式（$K=\mathbb{C}$ の場合）とする．V の順序付き基底を用いて f を n 変数の（同次）二次多項式として表し，平方完成することにより f が対角行列で表されるような V の順序付き基底を得ることができる．具体的な操作は証明の形で述べる．

証明. 以下では $K=\mathbb{C}$ の場合を念頭に置いて示す．$K=\mathbb{R}$ の場合には $P^*={}^tP$, $\overline{x_i}=x_i$, $|x_i|^2=x_i^2$ などが成り立つ．

1) $V=K^n$ の時. 対称行列（エルミート行列）A を用いて $f(x)=x^*Ax$ と表すことができる（$x=(x_i)\in K^n$）．ところで，f を対角行列で表すことと，$y=(y_i)\in K^n$ を $y=Qx$, $Q\in \mathrm{GL}_n(K)$ により定めて $f'(y)=f(Q^{-1}y)$ としたとき f' が $|y_i|^2$ たちの，実数を係数とする和に表されることは同値である．実際，$P=Q^{-1}=(p_1\ \cdots\ p_n)$ とし，K^n の順序付き基底 $\mathscr{V}=(p_1,\dots,p_n)$ に関する f の表現行列を B とすると，$B=P^*AP$ が成り立つ．一方，$f'(y)=f(Q^{-1}y)=f(Py)=y^*P^*APy=y^*By$ であるから，B が対角行列であることと f' が $|y_i|^2$ たちの，実数を係数とする和に表されることは同値である．そこで実際には変数変換により f を変形することを考える．まず $n=1$ とする．この時には $f(x_1)=a_{11}|x_1|^2$ であるから，f は既に $|x_1|^2$ の（形式的には $y_1=x_1$ とする）実数を係数とする和の形である（対角行列 (a_{11}) で表されている）．そこで，$n>1$ とし，$n-1$ 変数までは f を変数変換により $|y_i|^2$ の，実数を係数とする和の形で（f を対角行列で）表すことができるとする．

a) ある i, $1\le i\le n$ について，$a_{ii}\neq 0$ が成り立つとする．この時にはまず x_1 と x_i を入れ替えて $a_{11}\neq 0$ とする（形式的には $y_1=x_i$，$y_i=x_1$，$k\neq 1,i$ については $y_k=x_k$ とするが，煩雑になるので省略する）．対応する成分の変換行列は $Q(i,j)$（基本行列）である（従って対応する基底の変換行列も $Q(i,j)$ である）．その上で，新しい変数 $z_1,\dots,z_n$ を

$$z_k=\begin{cases} x_1+\displaystyle\sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j, & k=1\\ x_k, & k>1\end{cases}$$

により定める．すると，A が対称行列（エルミート行列）であることから

$$\begin{aligned}|z_1|^2&=|x_{11}|^2+\sum_{j=2}^n\frac{\overline{a_{1j}}}{\overline{a_{11}}}\overline{x_j}x_1+\sum_{j=2}^n\frac{a_{1j}}{a_{11}}\overline{x_1}x_j+\sum_{j,k\ge 2}\frac{\overline{a_{1j}}}{\overline{a_{11}}}\frac{a_{1k}}{a_{11}}\overline{x_j}x_k\\ &=|x_{11}|^2+\sum_{j=2}^n\frac{a_{j1}}{a_{11}}\overline{x_j}x_1+\sum_{j=2}^n\frac{a_{1j}}{a_{11}}\overline{x_1}x_j+\sum_{j,k\ge 2}\frac{\overline{a_{1j}}}{\overline{a_{11}}}\frac{a_{1k}}{a_{11}}\overline{x_j}x_k\end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$a_{11}\left|z_1\right|^2 = a_{11}\left|x_{11}\right|^2 + \sum_{j=2}^{n} a_{j1}\overline{x_j}x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}\overline{x_1}x_j + \sum_{j,k\geq 2}\frac{\overline{a_{1j}}a_{1k}}{a_{11}}\overline{x_j}x_k$$

が成り立つ．従って，

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i,j} a_{ij}\overline{x_i}x_j \\ &= a_{11}\left|z_1\right|^2 + g(z_2,\ldots,z_n), \end{aligned}$$

ただし g は $z_2,\ldots,z_n$ に関する二次形式（エルミート二次形式），が成り立つ．仮定により，$Q'\in\mathrm{GL}_{n-1}(K)$ が存在して，$z=\begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\in K^{n-2}$ について $g'(y)=g(Q'y)$ により定めると，g' は $\left|y_i\right|^2$ の，実数を係数とする和の形である．そこで

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & o \\ o & Q' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & & \cdots & & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とし，$y=Qx$ として $f'(y)=f(Q^{-1}y)$ とすれば，f' は $\left|y_i\right|^2$ の，実数を係数とする和の形である．y_i たちを変数として考えることは，$Q^{-1}=(w_1\ \cdots\ w_n)$ として順序付き基底 $(w_1,\ldots,w_n)$ を考えることに相当する．

b) $1\leq i\leq n$ について $a_{ii}=0$ が成り立つとする．任意の i,j について $a_{ij}=0$ ならば $f=0$ なので，既に $\left|x_i\right|^2$ の，実数を係数とする和の形である．そこで $a_{ij}\neq 0$ とする．仮定により $i\neq j$ であるが，$a_{ji}=\overline{a_{ij}}$ なので $i<j$ として良い．更に，x_1 と x_i，x_2 と x_j をそれぞれ入れ替えて $a_{12}\neq 0$ として良い．新しい変数 $y_1,\ldots,y_n$ を

$$y_k=\begin{cases} \dfrac{x_1+x_2}{2}, & k=1, \\ \dfrac{x_1-x_2}{2}, & k=2, \\ x_k, & k>2 \end{cases}$$

により定める．対応する変数の変換行列を P とすると，$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ であって，正則である．また，対応する基底の変換行列は P^{-1} である．さて，仮定から f

について

$$f(x) = a_{12}\overline{x_1}x_2 + a_{21}\overline{x_2}x_1 + (x_1, x_2 \text{ 以外の変数を含む項})$$

が成り立つので，$f'(y) = f(Q^{-1}y)$ とすると

$$\begin{aligned} f'(y) &= a_{12}(\overline{y_1} + \overline{y_2})(y_1 - y_2) + a_{21}(\overline{y_1} - \overline{y_2})(y_1 + y_2) \\ &\qquad + (y_1, y_2 \text{ 以外の変数を含む項}) \\ &= (a_{12} + a_{21})\,|y_1|^2 + (a_{12} - a_{21})\overline{y_1}y_2 - (a_{12} - a_{21})\overline{y_2}y_1 + (a_{12} + a_{21})\,|y_2|^2 \\ &\qquad + (y_1, y_2 \text{ 以外の変数を含む項}) \end{aligned}$$

が成り立つ．従って，場合 b) は場合 a) に帰着できる．

2) V が一般の場合．$\mathscr{V}$ の順序付き基底を一つ選び，A を f の $\mathscr{V}$ に関する表現行列とする．K^n 上の二次形式（エルミート二次形式）を $q(x) = x^*Ax$ により定めれば，$f(\mathscr{V}x) = q(x)$ が成り立つ．K^n の順序付き基底 $(u_1, \ldots, u_n)$ に関して q が対角行列で表されるとする．$P = (u_1 \ \cdots \ u_n)$ とすれば，P^*AP は対角行列である．ここで V の順序付き基底 $\mathscr{W}$ を $\mathscr{W} = \mathscr{V}P$ により定める．f の $\mathscr{W}$ に関する表現行列を B とし，q' を $q'(y) = y^*By$ により定める．$v = \mathscr{V}x = \mathscr{W}y$ とする．$x = Py$ が成り立つから $q(x) = q(Py) = y^*P^*APy = q'(y)$ が成り立つ．よって $f(\mathscr{W}y) = f(\mathscr{V}x) = q(x) = q'(y)$ が成り立つので，B は $\mathscr{W}$ に関する f の表現行列である．　□

V 上の二次形式（エルミート二次形式）f が，順序付き基底 $\mathscr{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ に関して対角行列で表されるとし，その対角成分を $a_1, \ldots, a_n$ とする．必要であれば v_i たちの順序を入れ替えて $a_1, \ldots, a_p > 0$, $a_{p+1}, \ldots, a_{p+q} < 0$, $a_{p+q+1} = \cdots = a_n = 0$ としてよい．このとき，$\mathscr{W} = \left(\frac{1}{\sqrt{|a_1|}}v_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt{|a_{p+q}|}}v_{p+q}, v_{p+q+1}, \ldots, v_n\right)$ とすれば $\mathscr{W}$ は V の順序付き基底である．また，$v \in V$ について，$x = (x_i)$ を v の $\mathscr{W}$ に関する座標ベクトルとすれば $f(v) = |x_1|^2 + \cdots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \cdots - |x_{p+q}|^2$ が成り立つ．

シルベスターの慣性律の証明には対称行列やエルミート行列が SO_n の元あるいは SU_n の元で対角化可能であることは用いていない．用いてしまうのであれば次のように考えることもできる．

命題 17.2. f を V 上の対称双線型形式（$K = \mathbb{R}$）あるいは対称半双線型形式（$K = \mathbb{C}$）とする．V の基底を用いて f を対称行列（エルミート行列）A で表したとき，A の正の固有値の数を p，負の固有値の数を q とすれば $\operatorname{sgn} f = (p, q)$ が成り立つ．

証明. $\mathscr{V}$ を V の基底とし，A を $\mathscr{V}$ に関する f の表現行列とすると，$P \in \mathrm{SO}_n$ あるいは $P \in \mathrm{SU}_n$ が存在して P^*AP は対角行列である．P^*AP は $\mathscr{V}P$ に関する f の表現行列であるから，p

を P^*AP の正の固有値の数，q を負の固有値の数とすれば $\operatorname{sgn} f = (p, q)$ が成り立つ．一方，$P^*AP = P^{-1}AP$ なので，P^*AP の固有値は重複度を込めて A の固有値と等しい． □

§ ベクトル解析に関するごく入門的な事項.

これらのことについての詳しいことは「ベクトル解析」で扱う[1].

定義 17.3. $\mathbb{R}^3$ の座標（変数）は (x_1, x_2, x_3) とする．$f, f_1, f_2, f_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．

1) dx_1, dx_2, dx_3 を（本当は意味があるが）単なる記号とする．また，$\mathbb{R}^3$ のベクトルと同様に $dx_1 \wedge dx_2$ などを考える．特に $dx_i \wedge dx_i = 0$ が $i = 1, 2, 3$ について成り立つ．また，$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ が成り立つ．
2) $d(dx_i) = 0$ と定める．
3) $$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$
と定める．
4) $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$ と置く[2]この時，
$$d\omega = df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dx_2 + df_3 \wedge dx_3$$
と定める．
5) $\mu = f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2$ と置く[3]この時，
$$d\omega = df_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + df_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + df_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$
と定める．
6) $\nu = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ と置く[4]．この時，
$$d\eta = df \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$
と定める．すぐ後で問にするように，実際には
$$d\eta = 0$$
が成り立つ．

定義 17.4. 函数は全て $\mathbb{R}^3$ 上の C^∞ 級のものとする．

[1]講義によっては,「d」をあまり表に出さず,「div, rot, grad」などを表に出す，より「古典的」な扱いを重視することがあるが，より専門的な講義で目にすることになると思う．
[2]ω は **1-形式**（微分 1-形式）と呼ばれるものであるが，ここでは気にしなくて良い．
[3]ω は **2-形式**（微分 2-形式）と呼ばれるものであるが，ここでは気にしなくて良い．
[4]ω は **3-形式**（微分 3-形式）と呼ばれるものであるが，やはりここでは気にしなくて良い．

1) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ について

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

と置く．$\operatorname{grad} f$ は $\mathbb{R}^3$ 上の $\mathbb{R}^3$-値函数である[5]．

2) $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ について[6]

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial f_3} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial f_3}{\partial f_1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial f_2} \end{pmatrix}$$

と定める．$\operatorname{rot} f$ は $\mathbb{R}^3$ 上の $\mathbb{R}^3$-値函数である[7]．

3) $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ について

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

と置く．$\operatorname{div} f$ は $\mathbb{R}^3$ 上の函数である[8]．

問 17.5. 函数は全て $\mathbb{R}^3$ 上の C^∞ 級のものとする．

1) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ について，df の係数は $\operatorname{grad} f$ と一致することを確かめよ．

2) $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$ と置く．このとき，

$$d\omega = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$$

が成り立つことを示せ．また，係数が $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ と一致することを確かめよ．

3) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を函数とすると，$d(df) = 0$ が成り立つことを示せ．

[5]実際には**ベクトル場**と呼ばれるものである．1-形式と考えることもある．
[6]実際には f はベクトル場である．
[7]実際には 2-形式であるが，ベクトル場と考えることもある．
[8]実際には 3-形式である．

4) $\mu = f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2$ とする．この時，

$$\begin{aligned} d\mu &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= (\operatorname{div} f) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．ここで $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$-値函数である[9].

5) $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$ と置く．このとき，$d(d\omega) = 0$ が成り立つことを示せ．

6) $\nu = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ とする．このとき，$d\nu = 0$ が成り立つことを示せ．

7) $\mu = f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2$ とする．このとき，$d(d\mu) = 0$ が成り立つことを示せ．

ω を上で考えた f, ω, μ, ν のようなものとすると，いずれの場合にも $d(d\omega) = 0$ が成り立つ．このことはしばしば $\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} = 0$, $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0$ などとして表される．この逆を問題にすることができる．例えば $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は $d(df) = 0$ をみたす．$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$ であるが，ここで df を一般にして，$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$ を考える．この ω について $d\omega = 0$ が成り立つ時，$\omega = df$ と表すことができるかどうかというのが問題である．rot などを用いれば，$\mathbb{R}^3$ 値函数 g について $\operatorname{rot} g = 0$ が成り立つ時に $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ が存在して $g = \operatorname{grad} f$ が成り立つか，と言い換えることができる．これが一定の状況で成り立つ[10]というのが Poincaré の補題，あるいは Green の定理，Stokes の定理，Gaußの発散定理である．これらはいわゆるテンソル解析や，大域解析[11]の基礎的な事項である．ベクトル解析や常微分方程式は（極めて少ない，例外的な進学先を除いて）非常に重要になるので極力履修することを勧める[12].

（以上）

[9]実際には $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場である．

[10]「一定」の状況が崩れると成り立たないことが実際に起きる．

[11]$\mathbb{R}^n$ 上に限らず，例えば球面上などで微積分を行ったりする．ベクトル解析でも基本的な場合を扱う筈である．

[12]一度講義を履修するだけで全て理解することは困難である．多くの場合，進学先での講義を含め，繰り返し触れる必要がある．