２０１６年度線型代数学（理 I 6,7,9,10 組向け，足助担当）　演習問題 １０ 2016/10/21（金）

問 10.1. $f, g \in K[t]$, $A \in M_n(K)$ とするとき，$f(A)g(A) = g(A)f(A)$ が成り立つことを示せ.

問 10.2. ユークリッド計量についても，エルミート計量についても

$$\langle \lambda v \mid \lambda w \rangle = |\lambda|^2 \langle v \mid w \rangle$$

が成り立つことを示せ.

問 10.3. V をユークリッド計量を持つ $\mathbb{R}$-線型空間とし，$v, w \in V$, $v, w \neq o$ とする.

1) v, w のなす角 θ は，$0 \leq \theta < \pi$ とすると一意的に定まることを示せ.
2) v, w のなす角と w, v のなす角は等しいことを示せ.
3) v, w のなす角を θ とすると，$-v, w$ のなす角の一つは $\pi - \theta$ であることを示せ.

問 10.4 (問 6.5 も参照のこと). $n > 1$ とし，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$ と置く.

1) A の固有多項式を求めよ.
2) A の固有空間は 1 次元であることを示せ.
3) A が対角化可能であることと，A の固有値の重複度が全て 1 であるであることは同値であることを示せ.
   ※ これは A が特別な形（コンパニオン行列）だから成り立つことである．単位行列を考えれば分かるように，一般には必ずしも成り立たない.

問 10.5. $A \in M_n(\mathbb{R})$ とし，A の固有値，固有ベクトルは $\mathbb{C}$ の範囲で考える.

1) $\lambda \in \mathbb{C}$ が A の固有値ならば，$\bar{\lambda}$ も A の固有値であることを示せ.
   ※ なお，講義で示したように，λ と $\bar{\lambda}$ の重複度は等しい.
2) $\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値とし，$v \in \mathbb{C}^n$ を λ に属する A の固有ベクトルとする．この時，$\bar{v}$ は $\bar{\lambda}$ に属する A の固有ベクトルであることを示せ.
3) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ を A の固有値とし，$v \in \mathbb{C}^n$ を λ に属する A の固有ベクトルとする．このとき，$v \notin \mathbb{R}^n$ が成り立つことを示せ.

4) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ を A の固有値とし，$v \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ を λ に属する A の固有ベクトルとする．$a = \operatorname{Re}\lambda,\ b = \operatorname{Im}\lambda$ とし，また，$u = \operatorname{Re} v \overset{\text{def}}{=} \dfrac{v+\bar{v}}{2}$，$w = \operatorname{Im} v \overset{\text{def}}{=} \dfrac{v-\bar{v}}{2\sqrt{-1}}$ と置く．この時，$u, w \in \mathbb{R}^n$ であることと，

$$A(u\ w) = (u\ w)\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ.

5) A の相異なる固有値全体を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_s$ とし，$\lambda_i \in \mathbb{R},\ \mu_j \notin \mathbb{R}$ とする．また，α_i を λ_i の，β_j を μ_j の重複度とする．最後に，A は $\mathbb{C}$ 上対角化可能であるとし，$P = (p_1\ \cdots\ p_r\ q_1\ \cdots\ q_s) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ について，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \mu_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_s \end{pmatrix}$ が成り立つとする.

a) $p_1, \ldots, p_r$ は（必要なら改めて選び直して）$\mathbb{R}^n$ の元であるようにできることを示せ.

b) $q_1, \ldots, q_s$ は $\mathbb{R}^n$ の元であるようにはできないことを示せ．また，必要なら順番を入れ替えて $\mu_{2m} = \overline{\mu_{2m-1}}$，$q_{2m} = \overline{q_{2m-1}}$ であるようにできることを示せ．従って s は偶数である.

c) $u_{2m-1} = \operatorname{Re} q_{2m-1}$，$u_{2m} = \operatorname{Im} q_{2m-1}$ として，$Q = (p_1\ \cdots\ p_r\ u_1\ \cdots\ u_s)$ と置くと，$Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ であって，また，$a_m = \operatorname{Re}\mu_{2m-1}$，$b_m = \operatorname{Im}\mu_{2m-1}$ と置けば

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ -b_m & a_m \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ.

d) c) の式の右辺は，$b_k > 0$（$1 \leq k \leq m$）とすると並び方を除いて A により一意的に定まることを示せ.

ヒント：例えば次の方針で示せる（ほかにも方法はある）．$Q^{-1}AQ$ が上の形であれば，$\mathbb{C}$ 上で A を対角化したときの形が定まる．後者の形は対角成分の並び順を除いて一意的である．あとは，$Q^{-1}AQ$ と対角行列の対応がどの程度の任意性をもつか考えれば良い.

（以上）