２０１６年度線型代数学（理Ｉ6,7,9,10 組向け，足助担当）　演習問題 ７　　2016/9/30（金）
'16/10/8：補題 7.5 について，講義や演習の流れとは独立して読めるように条件を追加・整理.

問 7.1 ***.** $M_1(K)$ の元に関する行列式について，交代性が成り立つことを示せ.
※ これは交代性の定義と論理の問題である.

問 7.2. $A = (a_1\ \cdots a_n) \in M_n(K)$ とする．$f\colon K^n \to K^n$ を

$$f(v) = \begin{pmatrix} \det(v\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_n) \\ \det(a_1\ v\ a_3\ \cdots\ a_n) \\ \vdots \\ \det(a_1\ \cdots\ a_{n-1}\ v) \end{pmatrix}$$

により定めると，標準的な順序付き基底に関する f の表現行列は A の余因子行列であることを示せ.

問 7.3 ***.** $A \in M_n(K),\ n \geq 3$ とする．$1 \leq i < k \leq n,\ 1 \leq j < l \leq n$ について $\widetilde{A}_{ik,jl}$ で A の第 i 行と第 k 行，第 j 列と第 l 列を取り除いて得られる $M_{n-2}(K)$ の元を表すと

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{1\leq i<k\leq n} (-1)^{i+k+j+l} \det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{il} \\ a_{kj} & a_{kl} \end{pmatrix} \det \widetilde{A}_{ik,jl} \\ &= \sum_{1\leq j<l\leq n} (-1)^{i+k+j+l} \det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{il} \\ a_{kj} & a_{kl} \end{pmatrix} \det \widetilde{A}_{ik,jl} \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．ただし，右辺において最初の式では j, l（但し $j \neq l$）を，二番目の式では i, k（但し $i \neq k$）を任意に固定する.

注 7.4. 余因子展開や問 (7.3) の式は行列の **Laplace 展開**と呼ばれる物の特別な場合である.

補題 7.5. 次が成り立つ.

1) $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ について $\sigma\tau \in \mathfrak{S}_n$ が定義される.
2) $\sigma, \tau, \rho \in \mathfrak{S}_n$ について $(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$ が成り立つ.
3) $\mathrm{id}_n \in \mathfrak{S}_n$ が成り立つ.
4) $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ について，$\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$ が定義される（σ^{-1} と名前が付いた $\mathfrak{S}_n$ の元が定まる）.
5) $\forall\,\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \mathrm{id}_n$ が成り立つ.
6) $\forall\,\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma\mathrm{id}_n = \mathrm{id}_n\sigma = \sigma$ が成り立つ.

補題 7.5 が成り立つことを指して，$\mathfrak{S}_n$ は**群**であると言う.

問 7.6. 補題 7.5 において $\mathfrak{S}_n$ を $\mathbb{R}^\times = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\}$，$\mathbb{C}^\times = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z \neq 0\}$，あるいは $\mathrm{GL}_n(K)$ で置き換えても同様のことが成り立つことを示せ．従って $\mathbb{R}^\times$, $\mathbb{C}^\times$, $\mathrm{GL}_n(K)$ は群であ

る．ただし，$\mathbb{R}^\times$, $\mathbb{C}^\times$ については id_n は 1 に，$\mathrm{GL}_n(K)$ については id_n は E_n にそれぞれ読み替えることとする．また，

$$\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \det A = 1\}$$

と置くと $\mathrm{SL}_n(K)$ は群であることを示せ．ただし，id_n は E_n と読み替える．

定義 7.7. $\mathfrak{S}_n$ の元で，i と j（$i, j \in N_n$, $i \neq j$）を入れ替え，その他は動かさないものを (i, j) などで表し，**互換**と呼ぶ．

補題 7.8. $\mathfrak{S}_n$ の元は互換の積として表すことができる．また，$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ について $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ は互換，と表すと k の偶奇は σ により定まり，互換の積としての表し方によらない．

証明. $n = 1$ の場合には，$\mathfrak{S}_1 = \{\mathrm{id}_1\}$ なので主張は成り立つ（互換は存在しない）．以下では $n \geq 2$ とする．まず前半を示す．$\mathfrak{S}_{n-1}$ の元は互換の積に表せるとし，$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ とする．n と $\sigma(n)$ を入れ替える $\mathfrak{S}_n$ の元を τ とすると，これは互換である．ここで $\sigma\tau(= \tau \circ \sigma)$ について，$\sigma\tau(n) = n$ が成り立つから，$\sigma\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$ とみなすことができる（$\mathfrak{S}_{n-1} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(n) = n\} \subset \mathfrak{S}_n$ とみなす）．従って，互換 $\sigma_1 \ldots, \sigma_r \in \mathfrak{S}_{n-1}(\subset \mathfrak{S}_n)$ が存在して $\sigma\tau = \sigma_1 \cdots \sigma_r$ が成り立つ．すると，$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_r \tau^{-1}$ が成り立つが，$\tau^{-1} = \tau$ なので σ は互換の積で表される．後半を示すために，$\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ が互換であるとき，$\mathrm{sgn}(\sigma_1 \cdots \sigma_k) = (-1)^k$ が成り立つことを示す．一般に，$\sigma, \tau = (m, l) \in \mathfrak{S}_n$（ただし $m < l$）とすると

$$\begin{aligned}
&\prod_{i<j} \frac{\sigma \circ \tau(j) - \sigma \circ \tau(i)}{j - i} \\
&= \frac{\sigma \circ \tau(l) - \sigma \circ \tau(m)}{l - m} \prod_{i \neq m,l} \frac{\sigma \circ \tau(m) - \sigma \circ \tau(i)}{m - i} \prod_{i \neq m,l} \frac{\sigma \circ \tau(l) - \sigma \circ \tau(i)}{l - i} \\
&\quad \times \prod_{\substack{i<j \\ i,j \notin \{m,l\}}} \frac{\sigma \circ \tau(j) - \sigma \circ \tau(i)}{j - i} \\
&= \frac{\sigma(m) - \sigma(l)}{l - m} \prod_{i \neq m,l} \frac{\sigma(l) - \sigma(i)}{m - i} \prod_{i \neq m,l} \frac{\sigma(m) - \sigma(i)}{l - i} \prod_{\substack{i<j \\ i,j \notin \{m,l\}}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\
&= -\prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}
\end{aligned}$$

が成り立つ．特に $\sigma = \mathrm{id}_n$, $\tau = \sigma_1$ とすれば，互換 σ_1 について $\mathrm{sgn}(\sigma_1) = -1$ を得る．また，$\sigma(\sigma_1 \cdots \sigma_{k-1}) = (-1)^{k-1}$ が成り立つならば $\mathrm{sgn}(\sigma_1 \cdots \sigma_k) = (-1)^k$ が成り立つ．従って σ を互換の積に表したとき，$\mathrm{sgn}\,\sigma = 1$ ならばその個数は偶数であって，$\mathrm{sgn}\,\sigma = -1$ ならば奇数である． □

定義 7.9. $\mathfrak{A}_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\}$ と置き **n 次の交代群**と呼ぶ．$\mathfrak{A}_n$ の元を**偶置換**，$\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$ の元を**奇置換**と呼ぶ.

問 7.10. $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ について $\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)$ が成り立つことを示せ.

例 7.11. $n = 3$ とする.

$$\mathfrak{S}_3 = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\}$$

が成り立つ．$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{id}_3$ である．上の段の三つの元は偶置換であって，下の段の三つの元は奇置換である.

問 7.12. $A \in M_n(K),\ P \in \mathrm{GL}_n(K)$ とすると $\widetilde{P^{-1}AP} = P^{-1}\widetilde{A}P$ が成り立つことを以下のそれぞれの方針に従って示せ.

1) まず P が基本行列の場合に示し，一般には P は基本行列の積として表せることを用いて，帰納的に命題を示す.
2) 行列式や余因子行列の成分に関する連続性を用いて A が正則な場合に帰着して示す.

問 7.13.

1) $A_1, \ldots, A_n \in M_n(K)$ とする．また，A_k は上三角行列であって，(k,k)-成分は 0 であるとする．この時，$A_1 \cdots A_n = O_n$ が成り立つことを示せ.
2) $A_1, \ldots, A_r \in M_n(K)$ とし，いずれも上三角行列とする．また，$n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N},\ n_k > 0,\ n_1 + \cdots + n_k = n$ が存在して，A_k 達は

$$A_k = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & B_{rr} \end{pmatrix}$$

と，$B_{ll} \in M_{n_l}(K)$ であるように一斉に区分けされているとする（B_{ij} 達のサイズが何であるか考えてみよ）．A_k について $B_{kk} = O_{n_k}$ が成り立つならば $A_1 \cdots A_r = O_n$ が成り立つことを示せ.

（以上）