２０１６年度線型代数学（理Ｉ 6,7,9,10 組向け，足助担当）　演習問題 ５　　2016/7/8（金）

’16/7/8：日付の訂正．問 5.21 を追加．

本来は講義で解説したいところであるが，時間の制約により演習に回したものが幾つかある．それらには ◎ を付した（多少複雑な物もあるが，難易度としては $*$ は付かない程度である．単に易しいので演習に回した物には印は付けていない）．これらについて，なぜそれが成り立つかといった原理的なことを理解するのには慣れ（　時間）が必要なので焦る必要はないが，事実自体は頻繁に用いるので，例を通じて状況を把握しておかれたい（これは講義のほぼ全般について言えることである）．

問 5.1. 線型空間 V, W と，V の基底 $\mathscr{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$，$W$ の元の族（W の元の集まり）$\mathscr{W}$ を以下のように定めるとき，$\varphi(v_i) = w_i,\ 1 \leq i \leq n$ を満たす線型写像 $\varphi\colon V \to W$ を全て求めよ（n は問ごとに多少変わる）．$\mathscr{V}$ が V の基底であることも確かめること．$^\circ$ が付いている物については表現行列を用いない φ のなるべく単純な与え方も考えよ（必ずしも一通りではない）．

1) $V = K^n,\ W = K^m,\ \mathscr{V} = \{e_1, \ldots, e_n\},\ \mathscr{W} = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

2°) $V = K_n[x] = \{f \in K[x] \mid f = 0$ または $\deg f \leq n\}$, $W = \mathbb{R}$ とする．$\mathscr{V} = \{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$，ただし，$f_0(x) = 1,\ f_i(x) = x^i,\ i \geq 1$ と置く．また，$w_0 = \cdots = w_n = 1 \in \mathbb{R} = W$ とし，$\mathscr{W} = \{w_0, \ldots, w_n\}$ とする．

3°) $V = W = M_{m,n}(K)$ とする．また，$\mathscr{V} = \{E_{ij}\}$，ただし E_{ij} は (i,j)-成分のみが 1 で他の成分が 0 に等しい $M_{m,n}(K)$ の元とする．$w_{ij} \in= K$ を $w_{ij} = E_{ji}$ とし，$W = \{w_{ij}\}$ と置く．本問に関しては $\varphi(E_{ij}) = w_{ij}$ を満たす φ を求めよ．

4°) $V = M_{m,n}(K),\ W = K$ とする．また，$\mathscr{V} = \{E_{ij}\}$，ただし E_{ij} は (i,j)-成分のみが 1 で他の成分が 0 に等しい $M_{m,n}(K)$ の元とする．$w_{ij} \in W = K$ を $w_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ により定め，$W = \{w_{ij}\}$ と置く．本問に関しては $\varphi(E_{ij}) = w_{ij}$ を満たす φ を求めよ．

ヒント：行列を一つ指定する（確定させる）のに，いろいろな方法があったのと同様に，線型代数を一つ指定するのにもいろいろな方法がある．例えば V, W の順序付き基底を一つずつ固定し，表現行列を指定すれば線型写像は定まる．これは一つの方法であるが，これがいつも得策とは必ずしも言えない．また,（この問では V は有限次元としているが,）V が無限次元の場合には基底の写され方を指定することにより線型写像を指定することはできるが，一般にはこれを行列を用いて表すことはできない（サイズが無限大になってしまう）．

問 5.2. 1) $A \in M_m(K)$ とし，$f\colon M_{m,n}(K) \to M_{m,n}(K)$ を $X \in M_{m,n}(K)$ について $f(X) = AX$ と置くことにより定める．E_{ij} を (i,j)-成分のみが 1 で他の成分が 0 に等しい $M_{m,n}(K)$ の元とし，$M_{m,n}(K)$ の順序付き基底 $\mathscr{E}$ を

$$\mathscr{E} = (E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn})$$

により定める．f の $\mathscr{E}$ に関する表現行列を求めよ．

2*) $V = K_n[x], W = K_m[y]$ とする（記号については問 5.1 を参照のこと）．$\mathscr{V} = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$, $\mathscr{W} = (1, y, y^2, \ldots, y^m)$ をそれぞれ V, W の順序付き基底とする．ここで f, g をそれぞれ V, W の線型変換とし，f の $\mathscr{V}$ に関する表現行列は $A = (a_{ij})$，g の $\mathscr{W}$ に関する表現行列は $B = (b_{ij})$ であるとする．また，$K[x, y]$ の部分集合 U を

$$U = \{\varphi \in K[x, y] \mid \exists\, \alpha_{ij},\ 0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq m,\ \varphi(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x^i y^j\}$$

と置く．つまり，U は x に関しては高々 n 次，y に関しては高々 m 次の，K の元を係数とする x, y に関する多項式全体のなす集合である．

a) U は $K[x, y]$ の部分線型空間であることを示せ．

b) U の次元を求めよ．また，

$$\mathscr{U} = (1, y, y^2, \ldots, y^m, x, xy, xy^2, \ldots, xy^m, \ldots, x^n, x^n y, \ldots, x^n y^m)$$

とすると $\mathscr{U}$ は U の順序付き基底であることを確かめよ．

c) $h \colon U \to U$ を

$$h\left(\sum_{i,j} \alpha_{ij} x^i y^j\right) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} f(x_i) g(y_j)$$

により定める．h は線型写像であることを示せ．また，h を U の線型変換とみなし，$\mathscr{U}$ に関する表現行列を求めよ．

問 5.3. K^n の基底 $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ を次のように定めるとき，$\mathscr{V}$ から $\mathscr{W}$ への変換行列を求めよ[1]．

1) $n = 2$ とし，$\mathscr{V} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$，$\mathscr{W} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ とする．

2) $n = 3$ とし，$\mathscr{V} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$，$\mathscr{W} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ とする．

3) $\mathscr{V} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathscr{W} = (w_1, \ldots, w_n)$ とする．
ヒント：$A = (v_1\ \cdots\ v_n)$, $B = (w_1\ \cdots\ w_n)$ と置いてみよ．

問 5.4. $V = W = K^3$ とし，$\mathscr{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\mathscr{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$ を以下のように定める．W の順序付き基底 $\mathscr{W}'$ は適宜定め，V の順序付き基底 $\mathscr{V}'$ を標準的な順序付き基底とした場合と，(v_1, v_2, v_3) とした場合の φ の $(\mathscr{V}', \mathscr{W}')$ に関する表現行列をそれぞれ求めよ．

[1] $\mathscr{V}$ から $\mathscr{W}$ への変換行列は通常は（この講義・演習でも）$\mathscr{W} = \mathscr{V}P$ を満たす $P \in \mathrm{GL}_{\dim V}(K)$ とするが，まれに $\mathscr{W}P = \mathscr{V}$ を満たす $P \in \mathrm{GL}_{\dim V}(K)$ とすることがある（これはこれでそれなりに筋は通っている）ので，どうも話がおかしいと思った場合には思い出すと良い．

1) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

$w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$

2) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$

問 5.5$^{\circledcirc}$. V, W, U を K-線型空間，$f\colon V \to W$, $g\colon W \to U$ を K-線型写像とする．$\mathscr{V}, \mathscr{W}, \mathscr{U}$ をそれぞれ V, W, U の順序付き基底とし，A を f の $(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ に関する表現行列，B を g の $(\mathscr{W}, \mathscr{U})$ に関する表現行列とする．このとき，$g \circ f\colon V \to U$ の $(\mathscr{V}, \mathscr{U})$ に関する表現行列は BA で与えられることを示せ.

問 5.6$^{\circledcirc}$. ここでは次の定理を，段階ごとに問にしつつ証明する．なお,「また」以下は以前示したので省略する.

定理. V, W を K-線型空間とし，$f\colon V \to W$ を K-線型写像とする．すると，以下は同値である.

a) f は K-線型同型写像である.
b) V, W のある順序付き基底に関する f の表現行列は正則である.
c) V, W の任意の順序付き基底に関する f の表現行列は正則である.

また，これらの同値な条件が成り立つ時，$\dim V = \dim W$ が成り立つ.

$\dim V = n, \dim W = m$ とする.

1) a) $\Longrightarrow$ b) が成り立つこと.

$\mathscr{V}, \mathscr{W}$ をそれぞれ V, W の順序付き基底とし，A を f の $(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ に関する表現行列とする.

i) $f^{-1}\colon W \to V$ の $(\mathscr{W}, \mathscr{V})$ に関する表現行列を B とすると，$BA = E_n, AB = E_m$ が成り立つことを示せ.

ii) i) を用いて $n = m$ であって，$A \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つことを示せ.

2) b) $\Longrightarrow$ c) が成り立つこと.

i) 仮定を用いて $n = m$ が成り立つことを示せ.

ii) 基底の取り替えにより，表現行列は $A \in M_n(K)$ から $P^{-1}AQ$，$P, Q \in \mathrm{GL}_n(K)$，と変化することと，$A \in \mathrm{GL}_n(K)$ ならば $P^{-1}AQ \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つことを用いて c) が成り立つことを示せ.

3) c) $\Longrightarrow$ a) が成り立つこと.

a) $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ をそれぞれ V, W の順序付き基底とし，A を f の $(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ に関する表現行列とする．このとき，A は正則であって $n = m$ が成り立つことを示せ.

b) g を $(\mathscr{W}, \mathscr{V})$ に関して A^{-1} で表されるような線型写像とすれば $g = f^{-1}$ が成り立つことを示せ.

これで定理が示せた. □

問 5.7. $A \in M_{m,n}(K),\ B \in M_{n,l}(K)$ とする．このとき ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ が成り立つことを示せ.

問 5.8. $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ とすると ${}^tP \in \mathrm{GL}_n(K)$ であって，$({}^tP)^{-1} = {}^t(P^{-1})$ が成り立つことを示せ．また，${}^tP \in \mathrm{GL}_n(K)$ ならば $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つことを示せ.

問 5.9. V, W を線型空間，$f\colon V \to W$ を線型写像とする．また，$\dim V = n, \dim W = m$ とする.

1) V, W の順序付き基底 $\mathscr{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ と $\mathscr{W} = (w_1, \ldots, w_m)$ が存在して f の $(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ に関する表現行列は行階段行列であることを示せ.
2) V, W の順序付き基底 $\mathscr{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ と $\mathscr{W} = (w_1, \ldots, w_m)$ が存在して f の $(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ に関する表現行列は列階段行列であることを示せ.
3) V, W の順序付き基底 $\mathscr{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ と $\mathscr{W} = (w_1, \ldots, w_m)$ が存在して f の $(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ に関する表現行列は $\begin{pmatrix} E_r & O_1 \\ O_2 & O_3 \end{pmatrix}$ の形であることを示せ．ここで，$O_1 \in M_{r,n-r}(K), O_2 \in M_{m-r,r}(K),\ O_3 \in M_{m-r,n-r}(K)$ はそれぞれ零行列である．また，$r = 0$ の時には全体が O_3 である（即ち，サイズが $m \times n$ の零行列である）と考える.

問 5.10 (系 1.8.7)**.** $A \in M_{m,n}(K)$ とする．$\operatorname{rank} A \leq \min\{m, n\}$ が成り立つことを次の方針に従って示せ．$f\colon K^n \to K^m$ を $f(v) = Av$ により定める.

1) $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} f \leq \dim K^m$ が成り立つことを用いて $r \leq m$ が成り立つことを示せ.
2) $r = \operatorname{rank} A$ とし，$\{w_1, \ldots, w_r\}$ を $\operatorname{Im} f$ の基底とする．このとき，$v_1, \ldots, v_r \in K^n$ を $w_i = f(v_i)$ が成り立つように選ぶと，$\{v_1, \ldots, v_r\}$ は線型独立であることを示せ．また，このことを用いて $r \leq \dim K^n = n$ が成り立つことを示せ.

講義では系 1.8.7 は階段行列を用いて示したが，実際にはこのように階段行列に関する議論は不要である.

問 5.11. $A \in M_{m,n}(K),\ w \in K^m$ を用いて $Av = w$ で与えられる $v \in K^n$ に関する方程式を考える．$(A\ w)$ に左基本変形を施すことは，$Av = w$ を v の成分に関する連立一次方程式とみなした場合どのような操作に対応するか説明せよ.

問 5.12. 次の行列を左基本変形で行階段行列に変形せよ.

$$1)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 0 & 4 & 11 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 9 & -1 & 3 & 14 \\ 2 & 0 & 5 & 4 & 8 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

問 5.13. $A \in M_{4,6}(K), w \in K^4$ を以下のように定め，$v \in K^6$ に関する方程式 $Av = w$ の解空間を V_w と置く．$V_w = \varnothing$ であるならばそのことを示し，そうでなければ $v_1, \dots, v_s, u \in K^6$ を

$$V_w = \{v \in K^6 \,|\, \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_s \in K,\ v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s + u\}$$

が成り立つように定めよ．ただし，$v_1, \dots, v_s$ は s がなるべく小さくなるように定めること．

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ w = o.$

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 0 & 4 & 11 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}\ w = o.$

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 0 & 4 & 11 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

問 5.14. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 9 & -1 & 3 & 14 \\ 2 & 0 & 5 & 4 & 8 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$ と置く．また，$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_4 \end{pmatrix} \in K^4$ について $V_w = \{v \in K^6 \,|\, Av = w\}$ と置く．$V_w \neq \varnothing$ であるための w に関する必要十分条件を $w_1, \dots, w_4$ を用いて表せ．また，

$$W = \{w \in K^4 \,|\, V_w \neq \varnothing\}$$

と置くとき，W を求めよ（問 5.13 の V_w のように表せ）．

問 5.15 $^{\circledcirc}$. ここでは

> **定理.** 1) $A \in M_{m,n}(K)$ について $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ が存在して PA は行階段行列である．講義の定義 1.8.2 の記号の下で，$\operatorname{rank} A = r$ が成り立つ．また，得られる行階段行列は A により定まり，P に依らない（一般には P は一意的ではない）．
> 2) $A \in M_{m,n}(K)$ について $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ が存在して AQ は列階段行列である．講義の定義 1.8.2 の記号の下で，$\operatorname{rank} A = r$ が成り立つ．また，得られる列階段行列は A により定まり，Q に依らない（一般には Q は一意的ではない）．

の証明を，段階ごとに問にしつつ行う．記号は講義の定義 1.8.2 の物を用いる．

証明. まず 1) を示す．

i) A に左基本変形を適当に（適切に）施すと，A は行階段行列に直せることを示せ．

従って主張のような P は存在する．得られる階段行列が P に依らないことを示す．まず次を示す．

$r = \operatorname{rank} A$ が成り立ち，また，$j_1, \ldots, j_r$ は変形の仕方に依らないこと．

ii) $A = (a_1 \ \cdots \ a_n)$ と，列ベクトルを用いて表し，$V_0 = \{o\},\ V_i = \langle a_1, \ldots, a_i \rangle$ とする．このとき，$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n$ が成り立つことを示せ．

iii) $d_i = \dim V_i$ とし，$\{v_1, \ldots, v_{d_i}\}$ を V_i の基底とする．すると $V_{i+1} = \langle v_1, \ldots, v_{d_i}, a_{i+1} \rangle$ が成り立つことを示せ．

iv) もし $a_{i+1} \in V_i$ ならば $d_{i+1} = d_i$ が成り立つことを示せ．

v) もし $a_{i+1} \notin V_i$ ならば $v_1, \ldots, v_i, a_{i+1}$ は線型独立であることを示せ．また，$d_{i+1} = d_i + 1$ が成り立つことを示せ．

さて，$f\colon K^n \to K^m$ を $f(v) = Av$ により定めれば $V_n = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \operatorname{Im} f$ が成り立つ．従って $d_n = \dim V_n = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A$ が成り立つ．また，$d_0 = \dim V_0 = 0$ が成り立つ．

vi) $0 = d_0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_n = \operatorname{rank} A$ と $\forall i,\ d_{i+1} - d_i \leq 1$ が成り立つことを示せ．

vii) もし $d_n = 0$ ならば $A = O_{m,n}$ が成り立つことを示せ．従ってこの場合には A は初めから階段行列であって，$\operatorname{rank} A = 0$ が成り立つ．また，$P \in \mathrm{GL}_m(K)$ ならば $PA = O_{m,n}$ だから，得られる階段行列は P に依らない．

$d_n \neq 0$ とする．この時には $1 \leq l_1 < \ldots < l_{\operatorname{rank} A} \leq n$ が存在して $d_{l_k - 1} < d_{l_k}$ が $k = 1, \ldots, \operatorname{rank} A$ について成り立つ．ここまでは A のみで定まることで，P や L には関係ないことに注意しておく（$PA = L$ とすれば L は行階段行列なのであった）．さて，$A = P^{-1}L$ が成り立つ．$r = 0$ ならば $L = O_{m,n}$ なので $A = O_{m,n}$ が成り立つ．この時は証明は済んでいるので $r > 0$ とする．

viii) $P^{-1} = (q_1 \ \cdots \ q_m)$ とし，$W_0 = \{o\},\ W_i = \langle q_1, \ldots, q_i \rangle$ とすると，$W_{i-1} \subsetneq W_i \iff i = j_k,\ k = 1, \ldots, r$ が成り立つことを示せ．

ヒント：L の形に着目せよ．

ix) $A = P^{-1}L$ であることを用いて，$j_k = l_k,\ r = \operatorname{rank} A$ が成り立つこと，さらに，このような P（あるいは P^{-1}）について $q_k = a_{j_k}$ が $1 \leq k \leq r$ について成り立つことを示せ．

これで得られる階段行列の大雑把な形（r や $j_1, \ldots, j_r$）は A のみで定まることが示された．次を示せば 1) の証明は完了する．

得られる階段行列が P に依らないこと．

$A = O_{m,n}$ の時には既に証明は済んでいるので $A \neq O_{m,n}$ とし，形式的に $j_{r+1} = n + 1$ と定めておく．$P, P' \in \mathrm{GL}_m(K)$ について $PA = L,\ P'A = L'$ とすると L, L' は行階段行列であるとする．すると $P'P^{-1}L = L'$ が成り立つ．$P'P^{-1} = R$ と置けば $RL = L'$ が成り立つ．$L = (l_1 \ \cdots \ l_n),\ L' = (l'_1 \ \cdots \ l'_n)$ とすれば $RL = (Rl_1 \ \cdots \ Rl_n)$ であるから，$l'_j = Rl_j$ が $j = 1, \ldots, n$ について成り立つ．

x) $j = j_k$，$k = 1, \dots, r$ の時には $l_{j_k} = l'_{j_k} = e_k$ が成り立つことを示せ.

xi) $R = (r_1 \ \cdots \ r_m)$ とすると

$$r_k = Re_k = Rl_{j_k} = l'_{j_k} = e_k$$

が成り立つことを示せ.

一方，$j_k + 1 \leq j \leq j_{k+1} - 1$ なる j について，l_j は $e_1, \dots, e_k$ の線型結合で表される.

xii) $l_j = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k$ とすると，

$$\begin{aligned} l'_j &= Rl_j \\ &= R(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k) \\ &= \lambda_1 Re_1 + \cdots + \lambda_k Re_k \\ &= \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k \\ &= l_j \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ.

xiii) $L = L'$ が成り立つことを示せ.

これで定理のうち，1) の証明は完了した. □

注 5.16$^{\circledcirc}$**.** $P'P^{-1} = (e_1 \ \cdots \ e_r \ *)$ が成り立つ．言い換えれば $P' = (e_1 \ \cdots \ e_r \ *)P$ が成り立つ．もし $r = m$ であれば，$(e_1 \ \cdots \ e_m) = E_m$ なので，$P' = P$ が成り立つ．一般には $r \leq m$ なので，任意性が生じうるが，それでも P の形はある程度定まっている.

問 5.17$^{\circledcirc}$**(定理 1.8.11).** V, W を K-線型空間とし，$f\colon V \to W$ を K-線型写像とする．$\dim V = n$ とすると，$n - \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} f$ が成り立つことを，次の方針で示せ.

1) $\mathscr{V} = (v_1, \dots, v_n)$ を V の順序付き基底とし，線型同型写像 $\varphi\colon K^n \to V$ を $\varphi(\lambda) = \mathscr{V}\lambda$ により定める.

   a) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f \circ \varphi$ が成り立つことを示せ.

   b) $\operatorname{Im} f = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle$ が成り立つことを示せ．従って $\operatorname{Im} f$ は有限生成である.

   c) $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} f = r$ とし，$\operatorname{Im} f$ の順序付き基底 $\mathscr{W}$ を一組選んで線型同型写像 $\psi\colon K^r \to \operatorname{Im} f$ を一つ定める．ここで $F = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi\colon K^n \to K^r$ を考えると，$\operatorname{Im} F = K^r$ が成り立つことを示せ.

   d) A を F の表現行列とする．A は f の $(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ に関する表現行列であることを確かめよ.

   e) $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} F = r$ が成り立つことを用いて，$\dim \operatorname{Ker} F = n - r$ が成り立つことを示せ.

   f) φ の $\operatorname{Ker} F$ への制限は $\operatorname{Ker} f$ への線型同型写像であることを示せ.

g) $n - \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} f$ が成り立つことを示せ．

2) $\{v_1, \dots, v_k\}$ を $\operatorname{Ker} f \subset V$ の基底とする．これを拡大して得られる V の基底 $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l\}$ について，$\{f(w_1), \dots, f(w_l)\}$ は $\operatorname{Im} f$ の基底となることを示せ．

問 5.18 ◎. ここでは次の定理を示す．

> **定理.** $A, B \in M_n(K)$ とする．$AB = E_n$ ならば $BA = E_n$ が成り立つ．特に $A, B \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つ．

1) まず次を示す．

> **補題.** $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,l}(K)$ とする．このとき，
> $$\operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$$
> が成り立つ．

$f\colon K^n \to K^m$, $g\colon K^l \to K^n$ をそれぞれ $f(v) = Av$, $g(w) = Bw$ により定める．

a) $\operatorname{Im} f \circ g \subset \operatorname{Im} f$ であることと，$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} f$, $\operatorname{rank} AB = \dim \operatorname{Im} f \circ g$ であることを用いて $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A$ が成り立つことを示せ．

b) $h\colon \operatorname{Im} g \to K^m$ を $h(v) = Av$ により定める．$\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} f \circ g$ が成り立つことを示せ．また，$\dim \operatorname{Im} h = \dim \operatorname{Im} f \circ g = \operatorname{rank} AB$ が成り立つことを示せ．

c) $\dim \operatorname{Im} h \leq \dim \operatorname{Im} g = \operatorname{rank} B$ が成り立つことを示せ．
ヒント：$\dim \operatorname{Ker} h$ や $\dim \operatorname{Im} h$ は h の定義域の次元と一定の関係にあるのであった．

よって $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$ が成り立つ．

2) 次に定理を示す．

a) $\operatorname{rank} A \leq n$, $\operatorname{rank} B \leq n$ が成り立つことを示せ．

b) 補題を用いて $n = \operatorname{rank} E_n = \operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$ が成り立つことを示せ．

c) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = n$ が成り立つことを示せ．

d) $A, B \in \mathrm{GL}_n(K)$ であって，$BA = E_n$ が成り立つことを示せ．

主張「$A, B \in M_n(K)$ とする．$AB = E_n$ ならば $BA = E_n$ が成り立つ．特に $A, B \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つ.」について，まず A, B が正方行列でない場合を考える．

問 5.19. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と置く．すると $AB = E_2$ であるが $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であって，E_3 には等しくない．

1) $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,m}(K)$ とする．$AB = E_m$ が成り立つならば $m \leq n$ が成り立つことを示せ．

2) $2 \leq m < n$ とする．$A \in M_{m,n}(K),\ B \in M_{n,m}(K)$ であって，$AB = E_m$ かつ $BA \neq E_n$ が成り立つ物が存在することを示せ．

次に $n = +\infty$ の場合を考える．無限サイズの正方行列を考えることは素朴にはできない[2]ので，ここでは n 次正方行列は K^n の線型変換（の表現行列）であると考える．すると $n = +\infty$ の場合に当たるのは無限次元線型空間の線型変換となる．これを踏まえて以下に答えよ．

問 5.20. $K[x]$ の線型変換 φ, ψ を $f \in K[x]$ について

$$\varphi(f) = \frac{df}{dx},$$
$$\psi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

により定める．

1) φ, ψ は線型変換であることを示せ．
2) $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ が成り立つことを示せ．
3) $\varphi \circ \psi \neq \mathrm{id}$ が成り立つことを示せ．

問 5.21. ここでは問 5.15 にある定理の 2) を示す．1) は既に示してあるので，これを用いる．

1) $B = {}^tA$ と置く．B に 1) を用いることにより，ある $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ が存在して AQ は列階段行列であることを示せ．
   ヒント：$Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ ならば ${}^tQ \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つのであった．
2) $Q, Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ について AQ, AQ' が共に列階段行列であるとする．${}^tAQ, {}^tAQ'$ を考えることにより，得られる列階段行列は一意的であることを示せ．
3) $\mathrm{rank}\,{}^tA = \mathrm{rank}\,A$ が成り立つことに注意して，AQ が列階段行列であるならば，0 でない列の数は $\mathrm{rank}\,A$ に等しいことを示せ．

（以上）

[2]適切な仮定の下で考えることは少なくないが，それなりに準備が要る．