２０１６年度線型代数学（理Ｉ6,7,9,10組向け，足助担当）　演習問題 2　　2016/6/17（金）
'15/6/24：問 2.5 の誤植を修正.

問 2.1 *(やや難しいが，重要である．∗を付けてはいるが，必ず解いてみること).

以下に挙げる線型空間の組 (V, W) について，V が線型空間であることを確かめ，また，V から W への線型同型写像を一つ挙げよ.

ヒント：線型空間の部分線型空間は線型空間なのであった．従って，K^n や $K[x]$ のような，線型空間であることが「当たり前」であるような空間を用いると証明は大分サボれる.

1) $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in K,\ a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0\}$，$W = K^2$.
2) $V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ は C^∞ 級であって，$f'' + f = 0$ を満たす$\}$，$W = K^2$.
   ヒント：$f'' + f = 0$ の一般解を考えてみよ．必要であれば常微分方程式の教科書を調べてみよ.
3) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ とする．$V = \{A \in M_2(K) \mid AB = BA\}$，$W = K^r$ とする．この問については r も決定せよ．また，B が一般の場合でも V は（$M_2(K)$ の部分）線型空間であることを確かめよ.
4) $V = \{f \in K[x] \mid \deg(f \circ f) \leq \deg f\}$，$W = K^2$.
   ヒント：部分線型空間であることを示すのに，直接的に定義の条件を確かめようとするのは必ずしも得策でない.（忘れなければ）後日同じ趣旨の出題をする.
5) $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in K,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow a_n = 0\}$，$W = K[x]$.
6) $V = K$，$W = K$．これについては次が成り立つことを示せ．f を V から W への K-線型同型写像とすると，$a \in K \setminus \{0\}$ が存在して $\forall v \in K,\ f(v) = av$ が成り立つ.
7) $V = M_{m,n}(K)$，$W = M_{n,m}(K)$.
   ※ 余裕があれば，線型同型写像を思いつく限り挙げよ．もし可能であれば全て挙げよ．ただし，通常の意味では列挙は不可能なので，6) のように（そこでは $K \setminus \{0\}$ を用いた）何らかの工夫が要る.
8) $V = (K^n)^* = \{f\colon K^n \to K \mid f$ は線型$\}$，$W = M_{1,n}(K)$.
   ヒント：表現行列を考えてみよ．7) を踏まえると $W = M_{1,n}(K)$ と $K^n = M_{1,n}(K)$ は線型同型であるが，$W = K^n$ とは考えない方が良い（同じであることと，同型であることの差異の例である）.

問 2.2. 次に挙げる線型空間 V とその部分集合 W の組について，W が V の K-部分線型空間であるか，理由と共に述べよ．必要に応じて場合分けすること.

1) $V = K^n,\ A \in M_{m,n}(K)$ とし，$W = \{v \in K^n \mid Av = o\}$ と定める.
2) $V = L^n,\ A \in M_{m,n}(K),\ w \in K^m$ とし，$W = \{v \in K^n \mid Av = w\}$ と定める.

3) $V = K[x],\ W = K_n[x] = \{f \in K[x] \mid f$ の $(n+1)$ 以上の項は 0 に等しい $\}$ とする．

※ $K[x]$ は一般的な記号であるが，$K_n[x]$ は必ずしもそうではない．後者については用いる際にはその場で定義した方がよい（のでここでもそうしている）．

4) $V = K^n,\ W = \mathbb{Z}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \,\middle|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z} \right\}.$

5) $K = \mathbb{C}$ とする．$V = \mathbb{C}^n,\ W = \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$

6) $V = K^2,\ W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in K \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in K \right\}.$

問 2.3. 1) $V = K^n$ とする．基本ベクトル $e_1, \ldots, e_n \in V$ は線型独立であることを示せ．

2) $V = K^n$ とし，$v \in K^n$ とする．o, v は線型従属であることを示せ．

3) $V = K^3$ とする．$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ とすると，v_1, v_2, v_3 は線型従属であることを示せ．

問 2.4. $v_1, \ldots, v_r \in K^n$ とし，$A = (v_1 \ \cdots \ v_r)$ と置く．

1) $v_1, \ldots, v_r$ が線型独立であることは，K^r の元 λ に関する方程式

$$A\lambda = o_n$$

の解が o_r のみであることと同値であることを示せ．

2) $v_1, \ldots, v_r$ が線型従属であることは，K^r の元 λ に関する方程式

$$A\lambda = o_n$$

が o_r 以外の解を持つことと同値であることを示せ．

問 2.5. $v_1, \ldots, v_r \in V$ とする．$v_1, \ldots, v_r$ が線型独立であることと，$f\colon K^r \to V$ を $f(\lambda) = (v_1 \ \cdots \ v_r)\lambda$ により定めると f が単射であることは同値であることを示せ．

問 2.6. V を K-線型空間とする．また，$v_1, \ldots, v_r \in V$ は線型独立とする．

1) どの v_i も o に等しくないことを示せ．

2) v_i 達の順序を入れ替えたものを $v'_1, \ldots, v'_r$ とすると，$v'_1, \ldots, v'_r$ は線型独立であることを示せ．

3) $s \leq r$ とすると，$v_1, \ldots, v_s$ は線型独立であることを示せ．

問 2.7. V, W を K-線型空間，$f\colon V \to W$ を K-線型写像とする．また，$v_1, \ldots, v_r \in V$ とし，$f(v_1), \ldots, f(v_r) \in W$ は線型独立とする．このとき $v_1, \ldots, v_r$ は線型独立であることを示せ．

問 2.8. W_1, W_2, W_3 を V の部分線型空間とし，$W_1 + W_2 + W_3$ は直和であるとする．

1) $W_1 + W_2,\ W_1 + W_3,\ W_2 + W_3$ はそれぞれ直和であることを示せ．
   ※ 逆は必ずしも成り立たないのであった．
2) $(W_1 \oplus W_2) \oplus W_3 = W_1 \oplus (W_2 \oplus W_3) = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ が成り立つことを示せ．

講義で部分線型空間の直和について述べたが，線型空間の直和と呼ばれる物も定義される．これ以降はこれについて述べるが，当面は部分線型空間の直和の方が大事なので，混乱するようであればこちらは忘れてしまって構わない．

定義 2.9. V_1, V_2 を K-線型空間とする．V_1 と V_2 の（抽象的な）**直和** $V_1 \oplus V_2$ を次のように定める．

1) 集合としては $V_1 \oplus V_2 = V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$ と定める．
2) $(v_1, v_2), (v_1', v_2') \in V_1 \oplus V_2$ について
$$(v_1, v_2) + (v_1', v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$$
   と定める．
3) $(v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2,\ \lambda \in K$ について
$$\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$$
   と定める．

問 2.10. 成分を横に並べて表すことにすれば，K^2 は K と K の直和に等しいことを示せ．

問 2.11*. 1) $V_1 \oplus V_2$ は K-線型空間であることを示せ．

2) $\iota_1 \colon V_1 \to V_1 \oplus V_2,\ \iota_2 \colon V_2 \to V_1 \oplus V_2$ をそれぞれ
$$\iota_1(v_1) = (v_1, o_2),$$
$$\iota_2(v_2) = (o_1, v_2)$$
   により定める．ここで $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ であって，o_1, o_2 はそれぞれ V_1, V_2 の零ベクトルである．$i = 1, 2$ について $W_i = \operatorname{Im} \iota_i$ と置くと，$\iota_i \colon V_i \to W_i$ は線型同型写像であることを示せ．また，抽象的な直和 $V_1 \oplus V_2$ と，部分線型空間の（$V_1 \oplus V_2$ 内での）直和 $W_1 \oplus W_2$ は等しいことを示せ．

問 2.12. V_1, V_2, V_3 を K-線型空間とすると，自然な同型 $(V_1 \oplus V_2) \oplus V_3 \cong V_1 \oplus (V_2 \oplus V_3)$ が存在することを示せ．通常はこれらを区別せず $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ で表す．

問 2.13 ***.** V を K-線型空間，W_1, W_2 を V の K-部分線型空間とする．W_1 と W_2 について，V の部分線型空間としての和空間 $W_1 + W_2$ が定まる．一方，W_1, W_2 はそれぞれ K-線型空間であるから，抽象的な直和も定まる．本来はこれは $W_1 \oplus W_2$ で表すが，$W_1 + W_2$ が直和であることと紛らわしいので，ここではしばらく抽象的な直和を U で表す．そして，$\iota\colon W_1 \cap W_2 \to U$ と，$\pi\colon U \to W_1 + W_2$ をそれぞれ

$$\iota(w) = (w, -w),$$
$$\pi(w_1, w_2) = w_1 + w_2$$

により定める．

1) ι, π はそれぞれ K-線型写像であることを示せ．また，ι は単射，π は全射であることを示せ．
2) $\operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Im}\iota$ が成り立つことを示せ．
3) $W_1 + W_2$ は（部分線型空間の和空間として）直和だとする．この時，π は K-線型同型写像であることを示せ．従って，この場合には $W_1 \oplus W_2$ で抽象的な直和を表すとしても，部分線型空間の直和を表すとしても本質的な問題は起きない（問 2.11 も参照のこと）．

定義 2.14 ***.** V, W, U を K-線型空間とし，$f\colon V \to W$ と $g\colon W \to U$ を K-線型写像とする．$g \circ f = 0$ が成り立つことを

$$\{o\} \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U \longrightarrow \{o\}$$

と表すことがある．これは**図式**（diagram）と呼ばれるものの一番簡単な例の一つである．さらに f が単射，g が全射であって，かつ $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ が成り立つ時，この図式を

$$\{o\} \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U \longrightarrow \{o\} \quad （完全）$$

と表し，**完全図式**と呼ぶ．

問 2.15 ***.** V, W を K-線型空間，$f\colon V \to W$ を K-線型写像とする．

$$\{o\} \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{i} V \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f \longrightarrow \{o\},$$

ただし，$v \in \operatorname{Ker} f$ について $i(v) = v \in V$，は完全であることをしめせ．
※ i は単射，$f\colon V \to \operatorname{Im} f$ は全射であって，かつ $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} i$ が成り立つことを確かめれば良い．

（以上）