２０１６年度線型代数学（理Ｉ6,7,9,10 組向け，足助担当）　演習問題 １　　2016/6/10（金）

講義で配布する演習問題全般に関する注意．

- 問題の並びは難易度の順にも，講義で扱った（扱う）順にも一致していない．
- あくまで演習問題であって期末試験やターム末試験の事前公開ではないが，これらの試験の水準の一つの目安とすると良い．適切と判断した場合には演習問題と類似あるいは同一の問題を出題する．どうも「演習問題よりはマシ」（逆評定より）という程度らしいので注意すること．
- 線型代数学演習とは内容の上では直接的に関連するが，この演習問題を線型代数学演習で用いることは原則としてない．特に打ち合わせているわけではないので問題が重複したり，類似のものがあったりするかも知れないが，そのような問題は大切であったり，典型的な問題であることが多い．
- ヒントを時々附す．多くの場合ヒントは非自明なことから成る．このような場合にはヒントの内容を無条件で認めるのではなく，必ず証明も考えること．
- 「$*$」が付いている問はやや難しい．数が増えれば増えるほど難しい．数が多いことと，今すぐに分からなくても構わない度合いは相関は高いが，必ずしも一致しないので注意すること．
- 配布する演習問題は講義の一部である．
- 演習問題にはしばしば誤植，あるいはまれに根本的な誤りがある．よほどのことがなければ訂正は講義では述べないが，
  http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~asuke/kougi/index.html
  に最新版を掲載している．訂正は把握していると仮定している．
- 講義の内容，演習問題いずれについても，一定程度考えた上でやはりおかしいという場合には遠慮無く指摘されたい．数学的に誤った指摘であっても負の評価はしない．

注意． 講義・演習では数式中にギリシア文字を多用する．例えば数理科学基礎の共通資料や古典ギリシア語（現代ギリシア語の発音はかなり異なり，数式を読み書きするのにはあまり役に立たない）の簡単な入門書などで確認しておくこと．

問 1.1. $V=\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,|\,a_n\in K\}$ を K の元からなる数列の空間とする．

1) 項毎の足し算，項を一斉に定数倍することにより V は K-線型空間であることを示せ．
2) $\alpha_1\,\ldots,\alpha_m\in K$ とし，

$$W=\{(a_n)\in V\,|\,a_{m+n}+\alpha_1a_{m+n-1}+\cdots+\alpha_ma_n=0\}$$

と置けば W は V の部分線型空間であることを示せ．

問 1.2. V を K-線型空間，W を V の K-部分線型空間とする．W は K-線型空間であることを示せ．

問 1.3. $f\colon V\to W$ を K-線型写像とする．o_V,o_W をそれぞれ V,W の零ベクトルとすると $f(o_V)=o_W$ が成り立つことを示せ．

問 1.4. $f\colon V\to W$ が線型同型写像であるならば，f は全単射であることを示せ．

問 1.5. 1) $M_{m,n}(K)$ は K^{mn} と線型同型であることを示せ．

ヒント：線型同型写像が存在すればよいのだから，一つ作れば良い．

2) $V = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in K^3 \,\middle|\, v_1 + v_2 + v_3 = o \right\}$ と置く．V は K^3 の部分線型空間であることを示せ．また，V は K^2 と線型同型であることを示せ．

問 1.6. $\psi\colon K^{n+1} \to K[x]$ を $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^{n+1}$ について $\psi(v) = v_0 + v_1 x + \cdots + v_n x^n$ と置くことにより定める（K^{n+1} の元を成分で表す際には添字を 1 から始めることが多いが，ここでは 0 からとした）．

1) ψ は K-線型写像であることを示せ．
2) ψ は K-線型同型写像でないことを示せ．
ヒント：線型同型写像は全単射なのであった．
3*) K^{n+1} から $K[x]$ への線型同型写像は存在しないことを示せ．
ヒント：K^{n+1} の元は全て $e_0, \ldots, e_n$ の線型結合として表すことができる．同型が存在するとしてそれを ρ とするとき，$K[x]$ の元は $\rho(e_0), \ldots, \rho(e_n)$ の線型結合として表されることをまず示せ．

問 1.7*. V を，K の元からなる数列全体のなす線型空間とする．$a \in V$ について，a の第 n 項（$n \in \mathbb{N}$）を a_n で表す．$\varphi\colon K[x] \to V$ を次のように定める．$f \in K[x]$ について $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ と表し，$m > n$ について $a_m = 0$ と定める．そして $\varphi(f) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とする．

1) φ は K-線型写像であることを示せ．
2) φ は K-線型同型写像ではないことを示せ．

※ $K[x]$ から V への K-線型同型写像は存在しないことを示すことができるが，やや難しい．

問 1.8. V, W を K-線型空間とする．$f, g\colon V \to W$ を K-線型写像，$\lambda \in K$ とすると $f + g$, λf は K-線型写像であることを示せ．

問 1.9. $f, g\colon K^n \to K^m$ を K-線型写像とし，A, B をそれぞれ f, g の表現行列とする．このとき，$f + g$ の表現行列は $A + B$ に等しいことを示せ．また，$\lambda \in K$ とすれば λf の表現行列は λA に等しいことを示せ．

問 1.10*. V, W, U を K-線型空間とする．また，$f\colon V \to W$, $g\colon W \to U$ を K-線型写像とする．

1) V^* は写像の和，定数倍に関して K-線型空間であることを示せ．
2) $f^*\colon W^* \to V^*$ が，$\varphi \in W^*$ について

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f$$

と置くことにより定まり，K-線型写像であることを示せ（写像の向きに注意）．f^* を f の**双対写像**と呼ぶ．

3) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ が成り立つことを示せ．

4) f が K-線型同型写像であるならば，f^* も K-線型写像であって，$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$ が成り立つことを示せ．

問 1.11 ***.** V, W を K-線型空間，$f\colon V \to W$ を K-線型写像とする．

1) $U \subset W$ を K-部分線型空間とする．（f が線型同型写像かどうかは問わず,）
$$f^{-1}(U) = \{v \in V \mid f(v) \in U\}$$
と定め，f による U の**逆像**と呼ぶ（$f^{-1}(U)$ は全体で一つの記号であって，特別な場合を除いて f^{-1} と U には分解されないので注意せよ）．$f^{-1}(U)$ は V の K-部分線型空間であることを示せ．

2) $X \subset V$ を K-部分線型空間とする．
$$f(X) = \{w \in W \mid \exists\, x \in X,\ w = f(x)\}$$
と置き，f による X の**像**と呼ぶ．$f(X)$ は W の K-部分線型空間であることを示せ．

問 1.12 ***.** V, W を K-線型空間，$f\colon V \to W$ を K-線型同型写像とする．$U \subset W$ とする（念頭にあるのは K-部分線型空間であるが，そのことを仮定する必要はないのでここでは単に部分集合とする）．f の逆写像 f^{-1} を g で表すことにする．このとき，g による W の像 $g(U)$ は，f による W の逆像 $f^{-1}(U)$ と一致することを示せ．即ち，
$$g(U) = \{v \in V \mid \exists\, u \in U,\ v = g(u)\},$$
$$f^{-1}(U) = \{v \in V \mid f(v) \in U\}$$
と置くと $g(U) = f^{-1}(U)$ が成り立つことを示せ．

従って $f^{-1}(U)$ という記法において，f に逆写像が存在する場合には f^{-1} と U とに分解されると考えても，そう考えなくても同じことである．

問 1.13. $F(\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ とする（この記号はここでの物である）
$$V = \{f \in F(\mathbb{R}) \mid f(-x) = f(x)\},$$
$$W = \{f \in F(\mathbb{R}) \mid f(-x) = -f(x)\}$$
と置く．V の元は**偶函数**，W の元は**奇函数**と呼ばれる．

1) $\pi_1\colon F(\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R})$ を
$$\pi_1(f)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

により定める．$\pi_1(f) \in V$ であって，π_1 を $F(\mathbb{R})$ から V への写像と見做すと線型写像であることを示せ．同様に，$\pi_2\colon F(\mathbb{R}) \to W$ を

$$\pi_2(f)(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

により定めることができて，線型写像であることを示せ.

2) $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{id}$ が成り立つことを示せ．即ち，$\forall f \in F(\mathbb{R})$, $\pi_1(f) + \pi_2(f) = f$ が成り立つことを示せ.

3) $F(\mathbb{R}) = V \oplus W$ が成り立つことを示せ.

問 1.14. $V = \mathbb{R}^2$ とし，

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\},$$
$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\},$$
$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

とする．$W_1 + W_2$, $W_1 + W_3$, $W_2 + W_3$ はいずれも直和であるが，$W_1 + W_2 + W_3$ は直和でないことを示せ.

（以上）