２０１０年度数学II演習（理I向け，足助担当）　第１１回　'10/12/21（火）４限
'10/12/24（金）４限
'10/12/22 訂正
'10/12/24 訂正・一部加筆

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．また，線型空間は全て有限次元であると仮定する．

問 11.1. 次の行列の（全ての）固有値とその重複度を求めよ．また，それぞれの固有値に属する固有空間を求めよ．

1) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & 6 & 8 \end{pmatrix}$　2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　3) $\begin{pmatrix} 55 & 44 & 33 \\ 27 & -12 & 57 \\ -58 & 16 & -76 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 9\sqrt{2}-1 & 7\sqrt{2}-3 \\ 0 & -3\sqrt{2}+1 & -3\sqrt{2}+3 \\ 0 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-3 \end{pmatrix}$　5) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 15 & 4 & 0 & -2 \\ -29 & -7 & -1 & 5 \\ 10 & 3 & 1 & -1 \\ 23 & 7 & -1 & -1 \end{pmatrix}$　7) $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 39 & 5 & -2 \\ 3 & 13 & -42 & 9 & -3 \\ 0 & 2 & -10 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 11 & -4 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

問 11.2.
1) A を以下の行列のいずれかとする．A が対角化可能であれば対角化し，対角化不可能であればそのことを示せ．対角化の際には $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P も明示すること．また，固有値が全て実数である場合には実行列で対角化すること．
2) A^m, $m \in \mathbb{Z}$, を求めよ．但し A が n 次であれば $A^0 = E_n$ とし，また，A^m, $m < 0$, は A が正則なときのみ $A^m = (A^{-1})^{-m}$ として定める．
注意：A^m を求めるのに必ずしも A を対角化する必要はないし，それよりも易しい計算法が存在することもある．

a) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & 6 & 8 \end{pmatrix}$　b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$　d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

問 11.3. $t \in \mathbb{C}$ とし，$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．
1) A_t の固有多項式を求めよ．また，（全ての）固有値とその重複度を求めよ．
2) A_t が（$\mathbb{C}$ 上）対角化可能なのは $t = 0$ の時，その時のみであることを示せ．
3) $t \neq 0$ とすると A_t と A_0 は相似ではないことを示せ．つまり，$P^{-1}A_0P = A_t$ をみたすような $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ は存在しないことを示せ．
4) A_0 以外の A_t は全て A_1 に相似であることを示せ．

問 11.4. 以下の命題のそれぞれについて，それが正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ．

1) $A \in M_3(\mathbb{R})$ とする．A が正則でなければ対角化不可能である．
2) $A \in M_3(\mathbb{C})$ とする．A の固有値が全て異なるとすると A は適当な $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ を用いて対角化可能である．つまり $P^{-1}AP$ が対角行列であるような $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ が存在する．
3) $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ とする．A, B が共に対角化不可能であればその積 AB も対角化不可能である．また，A, B が共に対角化可能であれば AB も対角化可能である．

問 11.5. 複素数列全体がなす複素線型空間の部分空間

$$V = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \forall n,\ a_n \in \mathbb{C},\ \forall m > 0,\ a_{m+3} + 3a_{m+2} - 4a_{m+1} - 12a_m = 0\}$$

を考える．また, V の元 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ に対し,（a_1 は無視して）項をひとつずらした数列 $\{a_2, a_3, \cdots\}$ を対応させる線型写像を $D\colon V \to V$ とする．

1) V の基底を一組求めよ（V は有限次元である）.
2) D の固有値と固有ベクトルを求めよ．
3) V の元 $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\langle a|b\rangle = \overline{a_1}b_1 + \overline{a_2}b_2 + \overline{a_3}b_3$$

と置くと $\langle\cdot|\cdot\rangle$ は V のエルミート計量であることを示せ．以下では V の計量としてこの計量を考える．

4) 1) で求めた V の基底をグラム−シュミットの方法で正規直交化せよ．
5) $W = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \forall n > 0,\ a_n \in \mathbb{C},\ \forall m > 0,\ a_{m+2} + 5a_{m+1} + 6a_m = 0\}$ とする．W は V の部分線型空間であることを示し，W の V における直交補空間を求めよ．

問 11.6. V を計量線型空間とし，f を V の線型変換とする．f は（$\mathbb{C}$ 上）対角可能であるとする．このとき f の随伴変換 f^* も（$\mathbb{C}$ 上）対角化可能であることを示せ．

定義. $f \in K[x]$ とする．$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ の時，$X \in M_n(K)$ に対して

$$f(X) = a_0E_n + a_1X + \cdots + a_kX^k \in M_n(K)$$

と定める．また，$0 \in K[x]$ については $0(X) = O_n$ と定める．このような操作を f に X を代入すると呼ぶ，また，右辺のような形の式を X の多項式と呼ぶ．

問 11.7 (ハミルトン・ケーリーの定理). $A \in M_n(\mathbb{C})$ とし，f_A を A の固有多項式とする．このとき $f_A(A) = O_n$ が成り立つことを示せ．

ヒント：A が対角化可能であれば $P^{-1}AP$ が対角行列であるように $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ をとれば $P^{-1}f_A(A)P$ の対角成分には $f_A(\alpha)$, α は A の固有値, の形をした複素数が並ぶのでこれは O_n に等しい．一般には対角化は不可能であるから，三角化を用いたり，近似を用いて対角化可能な場合に帰着するなど，何らかの考察が必要である．

（以上）