２０１０年度数学II演習（理I向け，足助担当）　第１０回　'10/12/7（火）４限
'10/12/13（月）４限
'10/12/8 訂正

以下では特に断らなければ $K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とする．また，線型空間は特に断らない限り計量が定まっていて，さらに有限次元であると仮定する．

問 10.1. $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ を計量線型空間とする．

1) $v, v' \in V$ とする．$\forall w \in V,\ \langle v \,|\, w \rangle = \langle v' \,|\, w \rangle$ が成り立てば $v = v'$ が成り立つことを示せ．
2) f, g を V の線型変換とする．$\forall v, w \in V,\ \langle f(v) | \, w \rangle = \langle g(v) | \, w \rangle$ が成り立てば $f = g$ が成り立つことを示せ．

問 10.2. W, U を V の部分線型空間とする．$W \perp U$ が成り立てば $W + U$ は直和であることを示せ．

定義. $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ を計量線型空間とし，W を V の部分線型空間とする．V の部分線型空間 U が W の（V における）直交補空間であるとは，

1) $V = W \oplus U$ が成り立ち，
2) $W \perp U$，すなわち，$\forall w \in W,\ \forall u \in U,\ \langle w | u \rangle = 0$ が成り立つ

ことを言う．W の直交補空間は存在すれば唯一であるので $W^{\perp}$ で表す．また，このとき V は U と W の直交直和であると言い $V = W \oplus U$（直交直和）と表す．

注. 問 10.2 により，最初の条件は $V = W + U$ とすれば充分である．

問 10.3. $V = \{(a_n)_{n=1,2,\ldots} \,|\, a_n \in K,\ \forall n > 0,\ a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0\}$ と置き，自然に線型空間とみなす．

1) $V \cong K^2$ が成り立つことを示せ．
2) $a = (a_n),\ b = (b_n) \in V$ について $\langle a \,|\, b \rangle = (2\overline{a_1} - \overline{a_2})(2b_1 - b_2) + (\overline{a_1} - \overline{a_2})(b_1 - b_2)$ と置く．すると $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は V に計量を定めることを示せ．
3) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する V の正規直交基底を一組求めよ．
4) $W = \{(a_n)_{n=1,2,\ldots} \in V \,|\, a_2 = a_1\}$ と置くと W は V の部分線型空間であることを示せ．また，$\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する W の直交補空間を求めよ．

問 10.4. V を計量線型空間とし，$W \subset V$ を部分線型空間とする．U_1, U_2 が共に W の直交補空間であるならば $U_1 = U_2$ が成り立つことを示せ．

注. U_1, U_2 が W の補空間であっても $U_1 = U_2$ とは限らないのであった．

問 10.5. V を計量線型空間とし，$W \subset V$ を部分線型空間とする．また，U を W の部分線型空間とする．

1) $U_W^\perp$ を W における U の直交補空間，$U^\perp$ を V における U の直交補空間とすると $U_W^\perp$ は $U^\perp$ の部分線型空間であることを示せ．
2) $U^\perp = U_W^\perp \oplus W^\perp$（直交直和）が成り立つことを示せ．ここで $W^\perp$ は W の V における直交補空間である．

定義. $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ を計量線型空間とし，W を V の部分線型空間とする．このとき，$p\colon V \to W$ を以下のように定める．まず，$W \neq \{o\}$ の時には $\{v_1, \ldots, v_k\}$ を W の正規直交基底とし，$p(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v_i|v\rangle\, v_i$ と置く．また，$W = \{o\}$ の時には $p = 0$ とする．このように定めた p を W への直交射影（正射影）と呼ぶ．

問 10.6. V, W, p を上と同様とする．$W \neq \{o\}$ とし，また，$\{u_1, \ldots, u_k\}$ を W の正規直交基底とする．$p'\colon V \to W$ を $p'(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle u_i|v\rangle\, u_i$ により定めると $p' = p$ が成り立つことを示せ．従って W への直交射影は W の正規直交基底の取り方に依らずに定まる．

問 10.7. V, W, p を上と同様とする．

1) $\forall\, v \in V,\ p(v) \perp (v - p(v))$ が成り立つことを示せ．
2) $p \circ p = p$ が成り立つことを示せ．
3) p はエルミート変換（$K = \mathbb{C}$）あるいは対称変換（$K = \mathbb{R}$）であることを示せ．

問 10.8. V, W, p を上と同様とする．

1) $\operatorname{Ker} p = W^\perp$ が成り立つことを示せ．
2) 逆に，線型写像 $f\colon V \to V$ を条件 $f(v) = \begin{cases} v, & v \in W, \\ o, & v \in W^\perp, \end{cases}$ により定めることができて，しかも $f = p$ が成り立つことを示せ．

問 10.9. V, W, p を上と同様とする．$v \in V$ とし，W の元 w に関する函数 f を $f(w) = \|w - v\|$ により定める．f が最小値を取るような $u \in W$ が唯一存在し，$u = p(v)$ が成り立つことを示せ．

問 10.10. グラム–シュミットの直交化法を直交射影を用いて説明せよ．

定義. $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ を計量線型空間とする．また，W を V の部分線型空間とし，$p\colon V \to W$ を W への直交射影とする．このとき，$r\colon V \to W$ を $r(v) = 2p(v) - v$ により定め，W に関する鏡映と呼ぶ．

問 10.11. V, W を上と同様とし，p を W への直交射影，r を W に関する鏡映とする．

1) r は計量を保つことを示せ．
2) $\dim V = n$，$\dim W = n - 1$ とする．このとき，V の任意の基底に関する r の表現行列の行列式は -1 に等しいことを示せ．

   ヒント：まず正規直交基底に関する表現行列を考えてみよ．
3) $\dim V - \dim W = m \geq 0$ の場合に r の表現行列について 2) と同様のことを調べよ．
4) $p \circ r = p$ が成り立つことを示せ．また，$r \circ r = \mathrm{id}_V$ が成り立つことを示せ．

問 10.12. $V = \left\{ (a_n)_{n=1,2,\ldots} \,\middle|\, \forall n > 0,\ a_n \in K,\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}$ と置く．V は数列の和，定数倍に関して 無限次元 K-線型空間である（このことは認めて良い）．また，$a = (a_n)_{n=1,2,\ldots}$，$b = (b_n)_{n=1,2,\ldots}$ を V の元とするとき $\langle a \,|\, b \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} b_n$ と置けば，$\langle \cdot | \cdot \rangle$ は V に計量を定める（このことも認めて良い）．

1) $W = \{ (a_n)_{n=1,2,\ldots} \in V \,|\, \exists M > 0,\ \text{s.t. } \forall m \geq M,\ a_m = 0 \}$ と置くと W は V の部分線型空間であることを示せ．
2) $W \neq V$ が成り立つことを示せ．
3) V に属さない数列を一つ挙げよ（発表する際には証明は概略を述べればよい）．
4) $v \in V$ について，$v \perp W$ が成り立つのであれば $v = o$（o は V の零ベクトル）であることを示せ．また，W の $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する，V における直交補空間は存在しないことを示せ．
5) $U = \{ (a_n)_{n=1,2,\ldots} \in V \,|\, \forall m \geq 10,\ a_m = 0 \}$ と置くと U は V の部分線型空間であることを示せ．
6) U の $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する直交補空間を求めよ．

（以上）