２０１０年度数学 II 演習（理 I 向け）　第５回　　　'10/6/14（月）４限
'10/6/15（火）４限

以下では特に断らなければ K は $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 5.1. 1) 上三角行列（下三角行列）同士の和・積は再び上三角行列（下三角行列）であることを示せ.

2) 正則な上三角行列（下三角行列）の逆行列は上三角行列（下三角行列）であることを示せ.

問 5.2. $A \in M_n(K)$ を $A = \begin{pmatrix} A' & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $A' \in M_{n-1}(K)$ であるように区分けする. $A' \in \mathrm{GL}_{n-1}(K)$ のとき,

$$L = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ c & d' \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} E_{n-1} & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が $A = LU$ を充たすように b', d' を定めよ.

問 5.3. $A \in M_n(K)$ とする. A の第 1 行から第 k 行, 第 1 列から第 k 列までを取り出して得られる行列を $A_k \in M_k(K)$ とする（A_k を第 k 主座小行列（k-th principal minor）と呼ぶ）. もし $A_1, \cdots, A_n (= A)$ が全て正則であるとすると, 対角成分が全て 1 であるような上三角行列 $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ と, 正則な下三角行列 $L \in \mathrm{GL}_n(K)$ がただ一組存在して $A = LU$ が成り立つことを示せ（例えば以下のように示せる）. これを LU 分解と呼ぶ.
存在の証明.

1) $n = 1$ の時は $U = (1)$, $L = A$ とすればよい.
2) 条件を充たすような n 次以下の行列について分解が存在したとし, $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$ であって, A も条件を充たすとする. $A = \begin{pmatrix} A' & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $A' \in M_n(K)$ であるように区分けする. $A' = A_n$ なので, 仮定から A' は正則である. 前問を用いて $A = L_1U_1$ とすると, L_1 の第 n 主座小行列は帰納法の仮定から LU 分解可能である（証明は必要である）. このことを用いてまず L_1 が LU 分解可能であることを示し, それから A 自身が LU 分解可能であることを示す.

一意性の証明. $A = LU = L'U'$ を共に LU 分解とする. このとき, $L'^{-1}L = U'U^{-1}$ が成り立つ. 両辺が共に E_n に等しいことを $L'^{-1}L$, $U'U^{-1}$ の形に着目して示す.

問 5.4. 以下の行列のそれぞれについて, LU 分解を求めよ.

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \\ -1 & 6 & 11 \end{pmatrix} \qquad 3)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

問 5.5 (ヴァンデルモンド（Vandermonde）の行列式). $n \geq 2$ とする.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

が成り立つことを示せ．ここで，$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ は $1 \leq i < j \leq n$ なる (i, j) の組全てについて $(x_j - x_i)$ を考えてその積を取ることを意味する．この行列式を $x_1, \cdots, x_n$ の差積と呼ぶ.

問 5.6. $A \in M_{m,n}(K)$ とし，$A = (a_1, \ldots, a_n)$ と K^m の元 $a_1, \ldots, a_n$ を用いて表す. $\operatorname{rank} A = n-1$ かつ $\operatorname{rank}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = n-1$ が成り立つならば，適当な $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in K$ が存在して $a_n = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_{n-1} a_{n-1}$ が成り立つことを示せ.

ヒント：例えば $A = (a_1 \ \cdots \ a_{n-1} \,|\, a_n)$ と区分けし次のような右基本変形を考えてみよ．まず A の左側の部分を列階段行列（普段考える階段行列の転置の形をしたもの）に変形し，その上で A 全体を列階段行列に変形する．特に二番目の段階でどのような変形をするのかよく観察してみよ.

問 5.7. $A \in M_{m,n}(K)$ とする．$i_1 < i_2 < \cdots < i_r$，$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ を正の整数とし，A から第 i_1 行，$\cdots$，第 i_r 行および第 j_1 列，$\cdots$，第 j_r 列を取り出して（取り去るのではない）得られる $M_r(K)$ の元を $A_{i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r}$ で表す（このような行列を r 次小行列などと呼ぶ）．ある $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$，$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ について $\det A_{i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r} \neq 0$ であることと，$\operatorname{rank} A \geq r$ であることは同値であることを示せ.

ヒント：基本変形により行列のランクは不変なのであった.

問 5.8. $A \in M_n(K)$ とする．A の余因子行列を $\widetilde{A}$ で表す.

1) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ であるとき，$\det \widetilde{A}$ を求めよ.
2) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ であるとき，$\widetilde{(\widetilde{A})} = (\det A)^{n-2} A$ が成り立つことを示せ.
3) $n > 2$ とする．$A \notin \mathrm{GL}_n(K)$ のとき，$\widetilde{(\widetilde{A})} = O_n$ であることを示せ.

ヒント：（少なくとも）二通りの方針があり得る．例えばまず $\operatorname{rank} A$ により場合分けをする．$\operatorname{rank} A < n-1$ の時には問 5.7 を用いれば $\widetilde{A} = O_n$ であることが容易に示せる．$\operatorname{rank} A = n-1$ の時には問 5.6 と，行列式の性質を用いると $\widetilde{A}$ が特別な形をしていることがわかり，$\operatorname{rank} A < n-1$ の場合に帰着できる．あるいは 2) に着目して，まず対応 $A \mapsto \widetilde{(\widetilde{A})}$ が $A \in M_n(K)$ の函数として（つまり n^2 個の変数の函数として）連続であることを示す．一方，任意の $A \in M_n(K)$ についてある正則な行列の列 $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots,}$ であって $\lim_{n \to \infty} A_n = A$ なるものが存在することを示す．これらのことから主張を示すことができる（多変数の函数の連続性について未習であると後者の方針で示すのは難しい）.

問 5.9. 以下の主張を確かめよ.

1) $M_{m,n}(K)$ は行列の和と K の元との積により K-線型空間である.

2) $K[\,t\,]$ で t を変数とする K 係数の多項式全体を表す.

$$K[\,t\,] = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \mid a_0, \cdots, a_n \in K\}$$

である（n は一般には考えている元により異なる）. また，$K_n[\,t\,]$ で t を変数とする高々 n 次の K 係数の多項式全体を表す.

$$K_n[\,t\,] = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m \mid a_0, \cdots, a_m \in K,\ m \leq n\}$$

である. $K[\,t\,]$，$K_n[\,t\,]$ は共に多項式の和・実数倍に関して K-線型空間である.
※ $K[\,t\,]$ は一般的な記号であるが，$K_n[\,t\,]$ はそうではない.

3) $V = \{\{a_n\}_{n=1,2,\cdots} \mid a_n \in K,\ a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0\}$ とする.
$a, b \in V$ であるとき，$a = \{a_n\}$, $b = \{b_n\}$ と表しておいて $c_n = a_n + b_n$ と置き，$a+b \in V$ を $a+b = \{c_n\}$ により定める. また，$a \in V$, $\lambda \in K$ であるとき，$a = \{a_n\}$ と表しておいて $d_n = \lambda a_n$ と置き，$\lambda a \in V$ を $\lambda a = \{d_n\}$ と定める. すると V は K-線型空間である.
※ $\{a_n\} \in V$ とすると一般項を求めることも可能であるが，本当にその必要があるか考えてみよ.

問 5.10. V を $\mathbb{C}$-線型空間とする. 集合として $W = V$ と置き，$v, v' \in W$ の時，$v+v'$ を V の元としての和として定め，$\lambda \in \mathbb{R}$ の時 λv を $\lambda \in \mathbb{C}$ とみなしてから V の元と $\mathbb{C}$ の元との積により定める. このとき，W は $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ.
※ $v \in V$ とし，$w = \sqrt{-1}v$ とする. W は集合としては V に等しいので $w \in W$ であるが，W においては $\sqrt{-1}$ 倍は定義されていないので，そもそも $\sqrt{-1}v$ を W で考えることができない. そのため，$w = \sqrt{-1}v$ という等式は W においては意味を持たない.

問 5.11. n を固定し，

$$W = \left\{ a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \;\middle|\; a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

と置く. ここで，$w = a_n \dfrac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \dfrac{d}{dt} + a_0$ は，$f \in \mathbb{R}[\,t\,]$ に対して

$$w(f) = a_n \frac{d^n f}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{df}{dt} + a_0 f$$

と置くことで定められた写像である.

1) $w \colon \mathbb{R}[\,t\,] \to \mathbb{R}[\,t\,]$ は $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ.

2) $w = a_n \dfrac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \dfrac{d}{dt} + a_0$，$w' = b_n \dfrac{d^n}{dt^n} + b_{n-1} \dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \dfrac{d}{dt} + b_0$ をそれぞれ W の元とする.

$$w + w' = (a_n + b_n) \frac{d^n}{dt^n} + \cdots + (a_1 + b_1) \frac{d}{dt} + (a_0 + b_0)$$

と定め，また，$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lambda w = (\lambda a_n)\frac{d^n}{dt^n} + (\lambda a_{n-1})\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + (\lambda a_1)\frac{d}{dt} + (\lambda a_0)$$

と定めると，$f \in \mathbb{R}[t]$ について $(w+w')(f) = w(f) + w'(f)$, $(\lambda w)(f) = \lambda w(f)$ がそれぞれ成り立つことを示せ.

3) 上で定めた演算により W は $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ.
ヒント：W の元の「係数」に着目すれば演算は $\mathbb{R}^{n+1}$ のものと同じである.

問 5.12 (小問は 4 問). $V = K^3$ とする．以下に挙げる部分線型空間 W_1, W_2, W_3 の組について，

1) $W_1 + W_2$, $W_1 + W_3$, $W_2 + W_3$, $W_1 + W_2 + W_3$
2) $W_1 \cap W_2$, $W_2 \cap W_3$, $W_1 \cap W_3$

をそれぞれ求めよ.

i) $V = K^3$, $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

ii) $V = K^3$, $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, W_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

問 5.13. 以下に挙げる $\mathbb{R}^2$ の部分集合がそれぞれ $\mathbb{R}^2$ の部分線型空間であるかどうか理由と共に答えよ.

1) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$　　2) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$

3) $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$　　4) $W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 4t+3s \\ s \end{pmatrix} \;\middle|\; t, s \in \mathbb{R} \right\}$

問 5.14. $\mathbb{R}^2$ の部分線型空間 W を $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\}$ により定める．$\mathbb{R}^2$ の部分線型空間 U_1, U_2 であって, $\mathbb{R}^2 = W \oplus U_1 = W \oplus U_2$ かつ $U_1 \neq U_2$ であるようなものを一組挙げよ.

問 5.15. V を K-線型空間とし，W_1, W_2, W_3 を V の部分線型空間とする.

1) $(W_1 + W_2) \cap W_3 \supset (W_1 \cap W_3 + W_2 \cap W_3)$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立たない例を挙げよ.
2) $((W_1 \cap W_2) + W_3) \subset (W_1 + W_3) \cap (W_2 + W_3)$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立たない例を挙げよ.

（以上）