２０１０年度数学II演習（理I向け）　第３回　　'10/5/17（月）４限
'10/5/18（火）４限

以下では特に断らない限り K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 3.1 (混乱する場合には最初は $K=\mathbb{R}$ としてよい). 次の方程式を解け．即ち，解が存在するかどうか判定し，存在するなら解を全て求め，存在しないならばそのことを示せ．また，解空間を V とし，$V=\{v\in K^n \mid \exists\,\lambda_1,\dots,\lambda_r\in K \text{ s.t. } v=\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_rv_r+v_0\}$ あるいは $V=\varnothing$ の形に表せ．なお，n,r や $v_1,\dots,v_r,v_0$ は適宜定めること．また，なるべく r が小さくなるようにすること（今回は r が最小であることも示すこと）.

1) $\begin{pmatrix}2&1&3\\1&-1&5\\0&4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\\-2\end{pmatrix}$.　　2) $\begin{pmatrix}-1&5&2&4\\6&3&2&8\\1&4&-1&1\\2&7&5&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-3\\-5\\5\end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix}2&-1&-2&-2\\-1&1&3&2\\1&1&5&2\\2&1&6&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\\b\\0\end{pmatrix}$,　ただし $a,b\in K$.

問 3.2. 以下の行列の逆行列が存在するかどうか判定し，存在するならばそれを求めよ．また，各々の行列の rank（ランク・階数）を求めよ.

1) $\begin{pmatrix}2&-1&4\\3&5&-1\\2&-2&5\end{pmatrix}$　2) $\begin{pmatrix}1&-2&2\\3&2&-3\\6&-4&3\end{pmatrix}$　3) $\begin{pmatrix}1&\sqrt{-1}&1&4&0\\0&2&3+\sqrt{-1}&\sqrt{-1}&3+3\sqrt{-1}\\2&0&3-3\sqrt{-1}&9&3-3\sqrt{-1}\end{pmatrix}$

問 3.3.

1) $A\in M_n(K)$ とする．$A\in \mathrm{GL}_n(K)$ であることと，$\operatorname{rank}A=n$ が成り立つことは同値であることを示せ.
2) $A\in M_n(K)$ とする．$A\in \mathrm{GL}_n(K)$ であることと，適当な左右の基本変形により A を E_n に変形できることは同値であることを示せ.
3) $A\in M_n(K)$ とする．$A\in \mathrm{GL}_n(K)$ であることと，左基本変形のみ（あるいは右基本変形のみ）により A を E_n に変形できることは同値であることを示せ.

定義. A,B,C を集合とする.

1) A から A への写像であって，$a\in A$ に対して a を与えるもの（要は何もしない写像）を A の**恒等写像**と呼び，id_A などで表す．考えている集合 A が前後関係から明らかなときには id_A を単に id で表すこともある.

2) $f\colon A \to B$，$g\colon B \to C$ をそれぞれ写像とする．このとき，f と g の**合成（合成写像）** $g \circ f\colon A \to C$ を $a \in A$ の時

$$g \circ f(a) = g(f(a))$$

と置くことにより定める．

定義. A, B を集合，$f\colon A \to B$，$g\colon B \to A$ を写像とする．$g \circ f = \mathrm{id}_A$，$f \circ g = \mathrm{id}_B$ が成り立つとき，g を f の**逆写像**と呼び f^{-1} で表す.

問 3.4. A, B を集合とする．

1) $f\colon A \to B$を全単射であるとする．ここで，$g\colon B \to A$を次のように定める．$b \in B$とすると，f は全射であるから $a \in A$ であって $b = f(a)$ が成り立つものが存在する．もし，$a' \in A$について $f(a) = f(a') = b$が成り立てば，f は単射であるから $a = a'$ が成り立つので，このような a は一意的である．そこで $g(b) = a$ と置く．このとき g は f の逆写像であることを示せ.
2) $f\colon A \to B$，$g\colon B \to A$ をそれぞれ写像とする．g が f の逆写像であれば f, g は共に全単射であることを示せ．また，$h\colon B \to A$ について h も f の逆写像であれば $g = h$ が成り立つことを示せ.
3) $f\colon A \to B$ に逆写像が存在すれば f は全単射であることを示せ.

問 3.4 の 2) は f の逆写像は（存在すれば）唯一であることを示している．また，1) と 3) は f に逆写像が存在することと f が全単射であることは同値であることを示している．

定義. V を K^n の，W を K^m の部分線形空間とする．$f\colon V \to W$ が K-**線型写像**であるとは，f が次の性質を持つことである：

i) $\forall v_1, v_2 \in V,\ f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$,
ii) $\forall v \in V,\ \forall \lambda \in K,\ f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

問 3.5. 1) $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ は K-線型写像であることを示せ.
2) $V = W = \mathbb{R}$ とする．V から W への $\mathbb{R}$-線型写像を全て求めよ.

定義. V を K^n の，W を K^m の部分線型空間とする．$f\colon V \to W$ が K-**線型同型写像**であるとは，K-線型写像 $g\colon W \to V$ が存在して

$$g \circ f = \mathrm{id}_V,$$

$$f \circ g = \mathrm{id}_W$$

がそれぞれ成り立つことを言う．このとき $f\colon V \xrightarrow{\sim} W$，$V \overset{f}{\cong} W$ などと表す．

定義． V, W は上と同様とする．ある K-線型同型写像 $f\colon V \to W$ が存在するとき，V と W は K-**線型同型**であるといい，$V \cong W$ などと表す．

問 3.6． V を K^n の，W を K^m の部分線型空間とする．また，$f\colon V \to W$ を K-線型写像とする．

1) f が K-線型同型写像であれば f は全単射であることを示せ．
2) f が全単射であるとすると，f は K-線型同型写像であることを示せ．
   ヒント：f^{-1} は存在するのだから，それを使うことを考えてみよ．

※ 実際には V や W が一般の「線型空間」であっても K-線型写像という概念が同様に定まり，問 3.6 の内容にあたることがその場合にも成り立つ．

ここで形式的に $K^0 = \{0\}$ とする．K^0 も線型空間であるが，特に**自明な線型空間**と呼ばれる．ここでは次を認める．

定理． $K^n \cong K^m$ であることと $n = m$ であることは同値である．

問 3.7 (問 2.1 も参照のこと)**．** $A \in M_{m,n}(K)$ とし，$v \in K^n$ に関する（斉次）方程式 $Av = 0$ の解空間を V とする．

1) $\mathbb{R}^{n-\operatorname{rank} A}$ から V への K-線型同型写像が存在することを示せ．
2) $W = \{w \in K^m \mid v \in K^n$ に関する方程式 $Av = w$ が解を持つ $\}$ とすると $\mathbb{R}^{\operatorname{rank} A}$ から W への K-線型同型写像が存在することを示せ．
3) 問 3.1 のそれぞれの方程式について，A を係数行列として 1)，2) が成り立つことを確かめよ（具体的に K-線型同型写像を構成せよ）．

上の定理を認めれば，斉次方程式の解空間の抽象的な構造は係数行列のみで定まることがわかる．

（以上）