２００６年度数学 II（社学）演習補足　　　　　　　'06/7/19（水）１時限

※ このプリントは試験の範囲には含めない.

**問１．** $a_1, \cdots, a_n$ を $\mathbb{R}^n$ のベクトルとし, これらを並べて得られる $n$ 次正方行列を $A$ とする：$A = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$. このとき, $a_1, \cdots, a_n$ が一次独立であることと, $v$ に関する方程式 $Av = 0$ の解が $v = 0$ ののみであることは同値であることを示せ.

**問２．** $V$ を $\mathbb{R}^n$ の線型部分空間とする. $V$ のベクトル $v_1, \cdots, v_k$ が存在して,

> 任意の $v \in V$ について, ある $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ が存在して
> $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ が成り立つ（ようにできる）

とする（このようなベクトルの組は必ず存在する）.

1) $\mathbb{R}^k$ から $V$ への写像 $f$ を $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}\right) = x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k$ と定めると, $f$ は線型写像であることを示せ.
2) $f$ は全射であることを示せ.
3) $f$ の行列表示を $A$ とする（$A$ は $(n \times k)$-行列である）. このとき $\operatorname{rank} A = \dim V$ が成り立つことを示せ.（これを $V$ の次元の定義と思ってもよい.）
4) 冒頭にあるような $v_1, \cdots, v_k$ のとり方は一般には一意的ではない. $v'_1, \cdots, v'_l$ を上のような性質を持つ $V$ の別なベクトルの組とするとき, 行列 $A'$ を $A$ と同様の方法で定めると $\operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} A$ であることを示せ.
注意：$l = k$ であるかどうかすらわからない.

**問３．** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を線型写像とする.

1) $f$ が単射であれば $f$ は線型同型写像であることを示せ.
2) $f$ が全射であれば $f$ は線型同型写像であることを示せ.

**問４．** $V = \{x$ を変数とする実係数の多項式$\}$ とし, $\varphi : V \to V$ を $f \in V$ に対して $\varphi(f) = \dfrac{df}{dx}$ と定める. $V$ は $\mathbb{R}^n$ の部分集合ではないが通常の多項式の和, 多項式と実数の積に関して線型空間である.

1) $\varphi$ は線型写像であることを示せ. （注意：$\varphi$ は通常の意味では行列では表せないので, 線型写像の定義に戻って示すしかない.）
2) 任意の $g \in V$ について, ある $f \in V$ が存在して $g = \varphi(f)$ が成り立つことを示せ.
3) 線型写像 $\psi : V \to V$ で, 任意の $f \in V$ について $\varphi \circ \psi(f) = f$ が成り立つものを一つ求めよ. また, その $\psi$ について $\psi \circ \varphi(g) = g$ が任意の $g \in V$ について成り立つかどうか調べよ.
4) どのような整数 $n$ についても線型同型写像 $V \to \mathbb{R}^n$ は存在しないことを示せ.

（以上）