２００６年度数学 II（社学）演習　　　　　　　　　　　　　　　　　’06/7/19（水）１時限

問１． A,B をそれぞれ正方行列とする．AB が可逆（正則）であれば A, B のいずれも可逆（正則）であることを示せ．

問２． $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

1) $\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$ であることを示せ．

2) $\operatorname{im} A = \mathbb{R}^2$ であることを示せ．

注意：$v \in \mathbb{R}^3$ に $Av \in \mathbb{R}^2$ を対応させる写像を T_A であらわすことにして（$T_A(v) = Av$），$\ker A$, $\operatorname{im} A$ をそれぞれ $\ker T_A$, $\operatorname{im} T_A$ と表すのが通常の記法である．ここでは記号を減らすために上のように表した．

問３． 以下のそれぞれの場合について $g \circ f$ を求めよ．また f, g, $g \circ f$ の行列表現（行列表示・表現行列）を求めよ．

1) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}.$

2) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ -x-y+z \end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x+y$

3) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+y \\ 3x+2y \end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x-y+z \\ -3x+2y-z \\ -x+y \end{pmatrix}.$

問４．

1) $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(v) = v$ で定めると，$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ は線型写像であることを示せ．$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ は恒等写像と呼ばれる．

2) $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ は n 次単位行列 E_n で表されることを示せ．

3) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が線型写像であって，しかも全単射であるとする．つまり，i) $f(v) = f(v')$ であれば $v = v'$, ii) 任意の $w \in \mathbb{R}^n$ についてある $v \in \mathbb{R}^n$ が存在して $w = f(v)$, が成り立っているとする．このとき以下の事実を示せ．

3-i) $w \in \mathbb{R}^n$ のとき，上の条件 ii) で与えられる v は実は唯一つである．

3-ii) $w \in \mathbb{R}^n$ に対して，条件 ii) で与えられる v（は唯一つなのでこれ）を対応させる写像を g とする：$g(w) = v$．このとき，g は線型写像となる．

3-iii) f が行列 A で表されるとすると，g は行列 A^{-1} で表される．

3-iv) $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ である．

定義. f が線型写像であって，さらに全単射であるとき，上のようにして与えられる線型写像 g を f の逆写像と呼び，f^{-1} で表す（f の逆写像は唯一である）．

（以上）