問１． A が $(m \times n)$-行列であるとき, $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $f_A(x) = Ax$ で定める．以下のそれぞれの場合に $\ker f_A$, $\operatorname{im} f_A$ を求めよ（下の注釈も参照のこと）．

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

注釈． $\ker f_A$, $\operatorname{im} f_A$ はそれぞれ講義で $\ker A$, $\operatorname{im} A$ と書いたものと同じである．実際には $\ker A$, $\operatorname{im} A$ という記法は必ずしも一般的ではない．もっとも一般的な流儀に従えば, A が与えられたとき f_A を上の式で定めてから $\ker A = \ker f_A$, $\operatorname{im} A = \operatorname{im} f_A$ と左辺を右辺で定義することになる.

問２． 以下の $\mathbb{R}^3$ の部分集合が（$\mathbb{R}^3$ の）線型部分空間であるかどうかを判定せよ.

1) $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; xyz = 0 \right\}$ 2) $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = y = z \right\}$

3) $V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 0 \right\}$

問３． 以下の写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が線型写像かどうかを判定せよ．もし f が線型写像ならばある $(n \times m)$-行列 A が存在して, 任意の $\mathbb{R}^m$ の元 $v \in \mathbb{R}^n$ について

$$f(v) = Av$$

が成立する（このことは認めてよい）ので, このような A を求めよ,

1) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. 2) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + y^2$. 3) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

問４． A を 3 次の正方行列, $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とする．x_1, x_2, x_3 に関する一次方程式 $Av = w$ について, 以下の問に答えよ.

1) ある $w \in \mathbb{R}^3$ について $Av = w$ の解が唯一存在することと, A が可逆（正則）であることは同値であることを示せ．また, このとき任意の $w \in \mathbb{R}^3$ について $Av = w$ の解が唯一存在することを示せ.
2) ある $w \in \mathbb{R}^3$ について $Av = w$ の解が無限個存在したとする．このとき, A は可逆（正則）ではないことを示せ.
3) A が可逆（正則）でなければ, ある $w \in \mathbb{R}^3$ について $Av = w$ は解を持たないことを示せ.

（以上）