２００６年度数学 II（社学）演習　　　　'06/7/5（水）１時限

問１． A が $(m \times n)$-行列であるとき, $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像 $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を

$$T_A(v) = Av$$

ただし $v \in \mathbb{R}^n$, として定める． 以下のそれぞれの場合に $\ker T_A$, $\operatorname{im} T_A$ を求めよ（集合の表し方は例えば下の問２を参考にせよ）．

1) $A = (1 \quad -1)$　　2) $A = (0 \quad 0)$

3) $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　　4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　5) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

問２． 以下の $\mathbb{R}^2$ の部分集合を図示し,（$\mathbb{R}^2$ の）線型部分空間であるかどうかを判定せよ.

1) $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$　　2) $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x \geq 0,\ y \geq 0 \right\}$　　3) $V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x + y = 0 \right\}$

4) $V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x + y = 1 \right\}$　　5) $V_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \det \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = 0 \right\}$

問３． α, β をそれぞれ実数として,

$$V = \{ \text{実数列 } \{a_i\}_{i=1,2,\cdots} \,|\, a_{i+2} + \alpha a_{i+1} + \beta a_i = 0 \}$$

とする. このとき, 以下を示せ.

1) $a = \{a_i\}_{i=1,2,\cdots}, b = \{b_i\}_{i=1,2,\cdots}$ をそれぞれ V の元（つまり, $a_{i i=1,2,\cdots}$ は $a_{i+2} + \alpha a_{i+1} + \beta a_i = 0$ をみたす実数列であり, $\{b_i\}_{i=1,2,\cdots}$ も同様の漸化式を満たす実数列である）とする. このとき, $a + b$ という名前の新しい数列を $(a+b)_i = a_i + b_i$ として定める. すると $a + b$ も V に属することを示せ.

2) $a = \{a_i\}_{i=1,2,\cdots}$ を V の元, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする. このとき, λa という名前の新しい数列を $(\lambda a)_i = \lambda a_i$ として定める. すると λa も V に属することを示せ.

3) $a = \{a_i\}_{i=1,2,\cdots} \in V$ とするとき, $f(a) \in \mathbb{R}^2$ を $f(a) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ として定める. このとき, $f(a+b) = f(a) + f(b)$, $f(\lambda a) = \lambda f(a)$ であることを示せ.

4) 任意の $v \in \mathbb{R}^2$ に対して, ある V の元 a が存在し $v = f(a)$ となることを示せ.

5) $a, b \in V$ が $f(a) = f(b)$ を満たせば $a = b$ であることを示せ.

注意・ヒント：数列の一般項を求める必要は全くない.