２００６年度数学 II（社学）演習　　　　　　　　　　　'06/6/28（水）１時限

※ 今回は用語をわざと大仰にしてあるが, 計算するという立場で見れば今まで扱ってきた行列しか出てこないので見かけに惑わされないこと.

問１. $\mathbb{R}^3$ の元（ベクトル）$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ について, x, y, z から定まる以下の $\mathbb{R}^3$ の元（ベクトル）の成分を計算せよ.

1) $x + y + z$　　　　3) $2x + y - 5z$

2) $3z - x - 2y$　　　4) $6x + 3y - 14z$

問２. $\mathbb{R}^n$ の元は（$\mathbb{R}^n$ の定義により）$(n \times 1)$-行列であった.

1) x を $\mathbb{R}^n$ の元、A を $(m \times n)$-行列とする時, Ax は $\mathbb{R}^m$ の元であることを示せ.

2) x を $\mathbb{R}^n$ の元、A を n 次正方行列とする時, Ax は $\mathbb{R}^n$ の元であることを示せ.

問３. A を n 次正方行列とし, $x \in \mathbb{R}^n$ とする.

1) A が可逆（正則）であれば, $x = 0$ と $Ax = 0$ は同値であることを示せ.

2) A が可逆（正則）でなければ, ある $x \in \mathbb{R}^n$ で $x \neq 0$ なるものが存在して $Ax = 0$ であることを示せ.

2) のヒント：$Ax = 0$ を x についての一次方程式と考えてみよ.

問４. $\mathbb{R}^3$ の元 v_1, v_2, v_3 を $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と定める.

a, b, c が実数であって,

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たすとすると, $a = b = c = 0$ であることを示せ.

ヒント: $X = (v_1\ v_2\ v_3)$ と, v_1, v_2, v_3 を並べてできる行列, $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とすると, $av_1 + bv_2 + cv_3$ は X と u を用いて行列の積の形に表すことが出来る. あとは問３を用いればよい.

（以上）