

問1. 以下の行列の逆行列および行列式を求めよ.

$$1) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 20 & 40 & 0 \\ 10 & 40 & 20 \\ 20 & 40 & 30 \end{pmatrix}$$

$$5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 7) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$8) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 9) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

問2. 次の行列のランクを求めよ. また, もし与えられた行列が正則であれば, 逆行列を求めよ.

$$1) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & -6 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -11 & -7 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

問3. n 次正方行列 A, B について $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ が成り立つ. このことを用いて n 次正方行列 A と, n 次の可逆(正則)行列 P について $\det(PAP^{-1}) = \det A$ が成り立つことを示せ.

問4. $n \geq 1$ とすると, n 次正方行列 A, B についての等式

$$\det(A+B) = (\det A) + (\det B)$$

は一般には正しくない.

- 1) 例を挙げることによってこのことを示せ. ただし $n=2$ としてよい(しなくともよい).
- 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, 上の等式が成り立つような行列 B を全て求めよ.

(以上)