２００４年度数学 II 演習　　　　'05/1/12（水）２時限 (10:40〜12:10)

問１. 次に示す行列が ($\mathbb{C}$ 上) 対角化可能であれば対角化し, そうでなければ対角化不可能であることを示せ.

$$1)\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad 3)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ -12 & -5 & -12 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad 5)\ \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

問２. V を高々2 次の $\mathbb{R}$ 係数の x の多項式のなすベクトル空間とする. 即ち,

$$V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

とし, $f, g \in V$ に対して $f + g$ を多項式としての和, $f \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して λf を実数と多項式の積として定める. このとき以下の問に答えよ.

1) $\{1, x, x^2\}$ は V の $\mathbb{R}$ 上の基底であることを示せ.

2) ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 を実数とし, 写像 $L : V \to V$ を $L(f) = \ell_0 f + \ell_1 \dfrac{df}{dx} + \ell_2 \dfrac{d^2f}{dx^2}$ により定める. このとき, L を基底 $\{1, x, x^2\}$ に関して行列で表示せよ.
ヒント：答えは ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 を用いて表される 3×3 行列である.

3) $L(f) = \dfrac{df}{dx}$ であるとき, L の固有値をすべて求め, それぞれの固有値に属する固有空間を求めよ.
注意：必要であれば $\lambda \in \mathbb{R}$ の時, $\dfrac{df}{dx}(x) = \lambda f(x)$ の解は $f(x) = ce^{\lambda x}$, $c \in \mathbb{R}$ で与えられることを用いてもよいが, 用いれば解答が易しくなるわけでは必ずしもない.

4) $f, g \in V$ に対して, $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$ と置くと, これは V の内積を定めることを示せ. ただし, 必要であれば次の事実を用いてよい：
事実：g を x の多項式で, $g(x) \geq 0$ を任意の $0 \leq x \leq 1$ について満たすものとする. このとき $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = 0$ であれば、g は多項式として 0 である.

以下の問 5)〜10) に解答する際には, 4) が解けていなくても $\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle$ が内積であることを用いてよい.

5) $W = \{f \in V \mid f$ は高々1 次の多項式 $\}$ と定めると, W は V の $\mathbb{R}$-部分線型空間であることを示せ.

6) W の基底であって, 4) で定めた内積に関して正規直交系をなすものをひとつ（一組）挙げよ.

7) 4) で定めた内積に関する W の直交補空間 $W^{\perp}$ を求めよ.
ヒント：$W^{\perp}$ は V の実 1 次元部分空間である.

ここで, 実数 α に対して $\varphi_\alpha : V \to V$ を $\varphi_\alpha(f) = \alpha f$ で定める. ただし $f \in V$ とする.

8) φ_α が 4) で定めた内積に関して直交変換であるための α の必要十分条件を求めよ.

9) φ_α は 4) で定めた内積に関して対称変換であることを示せ.

10) φ_α の固有値は α のみであることを示し, その重複度（本によっては代数的重複度と呼んでいる場合もある）を求めよ.