２００４年度数学 II 演習　　　　　　　　　’04/12/15（水）２時限 (10:40〜12:10)

問１．以下の行列 A について, A^m, $m \in \mathbb{Z}$ を求めよ．ただし, A が n 次であれば $A^0 = I_n$ とし, また, A^m, $m < 0$ は行列が正則なときのみ $A^m = (A^{-1})^{-m}$ として定める.

1) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 10 \\ -10 & -2 & -14 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$　　3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

問２．$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を n 次元計量実線型空間, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を V の基底, X を $\mathcal{E}$ に関する内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の行列表示とする．つまり, $X = (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j}$ と定める. $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ を V の別の基底, A を $\mathcal{E}$ から $\mathcal{F}$ への基底の変換行列とするとき, 基底 $\mathcal{F}$ に関する内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の行列表示を A と X を用いて表せ.

問３．1 変数多項式

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots a_1 t + a_0$$

と m 次正方行列 X に対し,

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots a_1 X + a_0 I_m$$

と定める.

1) 任意の奇数次の多項式 $f(t)$ と任意の実対称行列 A に対し, $f(B) = A$ となるような実対称行列 B が存在することを示せ.
2) $f(t) = t^2 + 2pt + q$ $(p, q \in \mathbb{R})$ とし, 実対称行列 A を
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
と定めるとき, $f(B) = A$ となるような実対称行列 B が存在するための p, q に関する必要十分条件を求めよ.

問４．

1) A を n 次正則行列とする．このとき, 適当な 1 変数多項式 f が存在して $A^{-1} = f(A)$ と表せることを示せ．ただし, $f(A)$ は問３のように定める.
2) A を n 次の, 正則でない行列とする．このとき, 適当な 0 でない 1 変数多項式 f が存在して $f(A) = O_n$（零行列）となることを示せ.

問 5. 次の文章は誤り「A が 2 次正方行列であって, $A^2-3A+2I_2=O_2$ であれば, $A=I_2$ または $A=2I_2$」を証明しようとしているものである. 誤りを指摘し, 反例を挙げよ.

証明. $f(t)=t^2-3t+2$ とすると, $A^2-3A+2I_2=O_2$ であるから $f(A)=O_2$ である. 一方, $f(t)=(t-1)(t-2)$ であるから, $f(A)=(A-I_2)(A-2I_2)=O_2$ である. したがって $A=I_2$ または $A=2I_2$ である. $\square$

問 6. 9 つの正方行列

$$A_{(i)}=\begin{pmatrix} a_1^{(i)} & a_2^{(i)} & a_3^{(i)} \\ a_4^{(i)} & a_5^{(i)} & a_6^{(i)} \\ a_7^{(i)} & a_8^{(i)} & a_9^{(i)} \end{pmatrix} \qquad (i=1,2,\ldots,9),$$

ただし $a_j^{(i)}=\begin{cases} 1 & (j \leq i) \\ 0 & (j > i) \end{cases}$, について対角化可能であるか否かを判定せよ.

問 7. 2 行 2 列の実行列全体の作る $\mathbb{R}$ 上の線型空間を $M_2(\mathbb{R})$ とする. 相異なる正の数 α, β, γ に対して $P=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ とおき, この P を用いて線型写像 $L: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ を

$$L(A)=PAP$$

で定義する.

1) L の固有値を求めよ.
2) L は対角化可能であることを示せ.