**問１**．$X$ を直交行列あるいはユニタリ行列とし，しかも上三角行列であったとする．$X = (x_{ij})$ と成分で表したとき，$x_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ かつ $|x_{ii}| = 1$ であることを示せ．

**問２**．$V, W$ を $K$-線型空間，$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_V$ を $V$ の，$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_W$ を $W$ のそれぞれ内積 $(K = \mathbb{R})$ あるいはエルミート内積 $(K = \mathbb{C})$ とする．このとき，$V \oplus W$ 上で演算 $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{V \oplus W}$ を，$u_1 = (v_1, w_1), u_2 = (v_2, w_2) \in V \oplus W$ であるとき

$$\langle u_1, u_2 \rangle_{V \oplus W} = \langle v_1, v_2 \rangle_V + \langle w_1, w_2 \rangle_W$$

として定める．すると，$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{V \oplus W}$ は $V \oplus W$ の内積あるいはエルミート内積であることを示せ．

**問３**．$X \in M_{m,n}(K)$ とし，$X$ を $m$ 次の縦ベクトル $x_1, \cdots, x_n$ を用いて $X = (x_1, \cdots, x_n)$ と表す．

1) $K^m$ の部分空間 $W_1, \cdots, W_n$ を

$$\begin{aligned} W_i &= x_1, \cdots, x_i \text{ で } K \text{ 上生成される } K^m \text{ の部分空間} \\ &= \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_i x_i \,|\, \lambda_1, \cdots, \lambda_i \in K\} \end{aligned}$$

として定める．また，$W_0 = \{0\}$ と定める．このとき，$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_n \subset K^m$ であることを踏まえて次を示せ．

   i) $i = 0, 1, \cdots, n-1$ について，$0 \leq \dim_K W_{i+1} - \dim_K W_i \leq 1$ を示せ．

   ii) $r = \mathrm{rank}\,_K X$ とすると，$W_i \subsetneq W_{i+1}$ なる $i$ $(0 \leq i \leq n-1)$ は丁度 $r$ 個であることを示せ．特に，$\dim_K W_n = r$ である．

2) 1) を踏まえて，$i(0), \cdots, i(r-1)$ を $W_i \subsetneq W_{i+1}$ なる $i$ を小さい順に並べたものとする．このとき，$K^m$ の標準的な内積 (エルミート内積) に関する正規直交基底 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ であって，$e_1, \cdots, e_t$ が $W_{i(t-1)+1} = \cdots = W_{i(t)}$ の基底であるようなものが存在することを示せ．但し，$1 \leq t \leq r$ とし，$i(r) = n$ と定める．

3) 2) のような性質を持つ基底 $e_1, \cdots, e_m$ を並べて得られる行列を $Q$ とする．$Q$ は直交行列 ($K = \mathbb{R}$ の時) またはユニタリ行列 ($K = \mathbb{C}$ の時) であることを示せ．

4) ある行列 $R = (r_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ で $i > j$ のとき $r_{ij} = 0$ であって，$X = QR$ を満たすものが存在することを示せ．
ヒント：$k \leq i(k)$ に注意せよ．

**問 4**.* $P$ を以下の行列とするとき，そのグラムシュミット分解 ($QR$ 分解) $P = QR$ を, $Q$ が直交行列 (ユニタリ行列), $R$ が対角成分がすべて非負であるような上三角行列となるように与えよ.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{-1} & 2 & \sqrt{-1} \\ 1 & 1 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & \sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$　　4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

**定義**. $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ を有限次元 $K$-計量線型空間とし, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ をその基底とする. このとき,

$$\begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle & \cdots & \langle e_1, e_n\rangle \\ \langle e_2, e_1\rangle & \langle e_2, e_2\rangle & \cdots & \langle e_2, e_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1\rangle & \langle e_n, e_2\rangle & \cdots & \langle e_n, e_n\rangle \end{pmatrix}$$

を内積 $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ の基底 $\mathcal{E}$ に関する行列表示と呼ぶことにする.

**問 5**. $V = \{$ 高々2 次の $t$ に関する $\mathbb{R}$ 係数の多項式 $\}$ とし, $V$ の基底として $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ をとる. いま, $V$ 上の内積 $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ を $f, g \in V$ に対し,

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(s)g(s)ds$$

で定める (とりあえずこれが内積であることは認めてよい).

1) 内積 $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ の, 基底 $\mathcal{E}$ に関する行列表示を求めよ.

ここで, $f, g \in V$ と自然数 $k = 1, 2, \cdots$ に対し,

$$\langle f, g\rangle_k = \langle f, g\rangle + \sum_{i=1}^{k} \left\langle \frac{d^i f}{dt^i}, \frac{d^i g}{dt^i} \right\rangle$$

とすると, これも $V$ の内積である (今の場合には $k \geq 3$ であれば $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_k$ は全て等しい.).

2) 各 $k$ に対し, 内積 $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_k$ の基底 $\mathcal{E}$ に関する行列表示を求めよ.

3) 内積 $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_1$ に関する $V$ の正規直交基底を一つ求めよ.

---

*1),2) は線型代数演習 (齋藤正彦著・東大出版会) から一部改変, 4) は線型代数演習 (齋藤正彦著・東大出版会)

4) $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ が内積であることを確かめよ.

5) $f, g \in V$ と自然数 $k = 1, 2, \cdots$ に対し,

$$\langle f, g\rangle_k = \langle f, g\rangle + \sum_{i=1}^{k} \left\langle \frac{d^i f}{dt^i}, \frac{d^i g}{dt^i} \right\rangle$$

とすると, 各 $k$ について $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_k$ は $V$ 上の内積となることを示せ.

4), 5) のヒント：$f, g$ を $C^\infty$ 級函数と思って, 解析に持ち込むことも出来るし, 今は $f, g$ は多項式なので内積を具体的に $t$ の係数の多項式として計算してから調べることも出来る. 多少解析の知識が必要になるが, 証明抜きで適宜使ってよい.

**問 6**. $V$ を有限次元 $K$-線型空間とし, $V$ 上の内積 $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ を 1 つとる. $K = \mathbb{C}$ の時には「内積」は「エルミート内積」のこととする.

1) $f : V \to V$ を $K$-線型同型写像とする. $v, w \in V$ に対して, $\langle v, w\rangle_f = \langle f(v), f(w)\rangle$ と定めると, $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_f$ は $V$ の内積となることを示せ.

2) $V$ 上の任意の内積 $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle'$ に対し, ある $K$-線型同型写像 $g : V \to V$ が存在して $\langle v, w\rangle' = \langle v, w\rangle_g$ $(\forall v, w \in V)$ となることを示せ.

**問 7**. 以下の行列の各々について, その行列式と逆行列を求めよ. 但し, 可能であれば例えば 2) を解く際に 1) の結果を用いるなど, 他の小問の結果を利用してもよい.

1) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & -6 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

**問 8**. 実数 $x, y, z$ に関する以下の連立一次方程式が解を持つための実数 $\alpha$ の条件を求め, 解を持つときには解を全て求めよ. もし, 解を持つような $\alpha$ が存在しないときには, そのように記すこと.

$$\begin{cases} 3x + 2y - 6z = -3, \\ 2x + y - 4z = -2, \\ x + 2y - 2z = \alpha. \end{cases}$$

**問 9**. $A$ を実数を成分とする $n$ 次正方行列とし, $A^3 = O$ （零行列）と仮定する. このとき以下の問に答えよ.

1) $A$ は正則行列ではないことを示せ.

2) $I_n$ を $n$ 次の単位行列とするとき, $I_n + A + A^2$, $I_n - A$ は共に正則行列であることを示せ. ここで, 単位行列とは対角成分が全て 1 であって, そのほかの成分は全て 0 であるような行列のことである.

**問** 10. $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 \in \mathbb{Z}, \ x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ とする. このとき $V$ は $\mathbb{R}^3$ の $\mathbb{R}$-線型部分空間であるかどうか理由と共に述べよ. 但し $\mathbb{Z}$ で整数全体を表す.