２００４年度数学 II 演習　　　　　　　　　'04/10/6（水）２時限 (10:40〜12:10)

記号. n 次正方行列 X に対し,

$$T_X(a) = Xa,\ (a \in \mathbb{R}^n)$$

で定まる $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像を T_X で表すことにする.

問１. ２つの n 次正方行列 A, B が $A + B = I_n$, $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B = n$ を満たすとき以下を示せ.

1) $\operatorname{Ker} T_A = \operatorname{Im} T_B$.
2) $AB = BA = O, \quad A^2 = A, \quad B^2 = B$.

問２. n 次実正方行列 A が $A^2 = I_n$ を満たすとする．このとき

$$V_1 = \operatorname{Im} T_{A+I_n},$$
$$V_2 = \operatorname{Im} T_{A-I_n}$$

と定め，$s = \dim V_1$, $t = \dim V_2$ とおく.

1) $s + t = n$ であることを示せ.
   ヒント：$V_1 \cap V_2$ と $V_1 + V_2$ がそれぞれどのような空間になるか考えてみよ.
2) $\{e_1, \ldots, e_s\}$ を V_1 の基底，$\{f_1, \ldots, f_t\}$ を V_2 の基底とする.
   このとき $\{e_1, \ldots, e_s, f_1, \ldots, f_t\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底となることを示せ.
3) $T = (e_1, \ldots, e_s, f_1, \ldots, f_t)$ とすると T は正則行列であって,

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & -I_t \end{pmatrix}$$

   が成り立つことを示せ.

問３. 線型空間 V から V 自身への線型写像 $P_1, \ldots, P_k$ が,

1) $P_j^2 = P_j$, $j = 1, \ldots, k$
2) $P_j P_k = 0$, $j \neq k$
3) $P_1 + \cdots + P_k = \mathrm{id}_V$

を満たすとき，$W_j = \operatorname{Im} P_j$ とすると，$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ となることを示せ．ただし，3) の左辺は $f(v) = P_1(v) + \cdots + P_k(v)$ で定まる線型写像を表す.

問 4．以下のように線型空間 V, W と，V から W への線型写像 f を与える．このとき適当に V, W の基底を選んで f を行列表示せよ．また，f が線型同型写像であるかどうか判定し，同型写像である場合には逆写像を求めよ．

1) $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}(n; K)$ を一つ固定する．$V = W = M_n(K)$ とし，$f(X) = AXA^{-1}$ で定まる f.
2) $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(n; K)$ を一つ固定する．$V = W = M_n(K)$ とし，$f(X) = AX - XA$ で定まる f.
3) $V = \{$ 高々2 次の K-係数の t についての多項式 $\}$, $W = K$, $f(\varphi) = \varphi(0)$，但し $\varphi \in V$.
4) $V = \{$ 高々2 次の K-係数の t についての多項式 $\}$, $W = K^3$,

$$f(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi'(0) \\ \dfrac{1}{2}\varphi''(0) \end{pmatrix},$$

ただし $\varphi \in V$.

問 5．$f : V \to V$ を線型変換，$\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ を V の基底とする．ここで，A を f の $\mathcal{E}$ に関する行列表示，A' を f の $\mathcal{E}'$ に関する行列表示とするとき，$\det A' = \det A$, $\mathrm{tr} A' = \mathrm{tr} A$ が成り立つことを示せ.

注意. 従って, 'f の行列式 $\det f$', 'f のトレース $\mathrm{tr} f$' という概念が意味を持つ.

問 6．V_1, V_2, V_3 を K-線型空間, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ をそれぞれ V_1, V_2, V_3 の K 上の基底とする．$f : V_1 \to V_2$, $g : V_2 \to V_3$ をそれぞれ K-線型写像，A_f, A_g をそれぞれ f の $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ に関する行列表示，g の $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ に関する行列表示とするとき, $g \circ f$ の $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3$ に関する行列表示は $A_g A_f$ であることを示せ.