２００４年度数学 II 演習　　　　　　　　　　　'04/7/2（金）２時限 (10:40〜12:10)

$K = \mathbb{R}$ もしくは $K = \mathbb{C}$ とする.

問１． V を K-線型空間とし, V の元 $v_1, \cdots, v_l$ が K 上 V を生成すると仮定する. このとき, V の元 $w_1, \cdots, w_k$ と lk 個の K の元 $\{a_{ij}\}$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m$ が存在して $v_j = \sum_{i=1}^{l} a_{ij} w_i$ が任意の j について成り立つとする. このとき $w_1, \cdots, w_k$ は K 上 V を生成することを示せ.

定義． K-線型空間 V, W の間の K-線型写像 $f : V \to W$ について

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{w \in W \mid \exists v \in V, w = f(v)\}, \\ \operatorname{Ker} f &= \{v \in V \mid f(v) = 0\}. \end{aligned}$$

とおいて、それぞれ f の像, f の核という.

問２． $f : K^n \to K^m$ を K-線型写像とする. f の行列表示を A とするとき, 以下を示せ.

1) $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} f$.
2) $n - \operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Ker} f$.

問３． 以下の $f : K^n \to K^m$ に対して, 像と核の次元を決定し, 各々の基底を一組ずつ求めよ. 必要であれば問２の結果を用いてよい.

1) $f : K^4 \to K$, $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = x + 2y + 3z + 4w.$

2) $f : K^4 \to K^2$, $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ y - w \end{pmatrix}.$

3) $f : K^4 \to K^2$, $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z - w \\ 3x + 3y - 3z - 3w \end{pmatrix}.$

4) $f : K^4 \to K^3$, $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ y + z + w \\ z + w + x \end{pmatrix}.$

5) $f : K^4 \to K^4$, $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z + w \\ y + z + w \\ z + w \\ w \end{pmatrix}.$

定義． W_1, W_2 が K-線型空間 V の K-線型部分空間であるとき,

$$W_1 + W_2 = \{v \in V \mid \exists w_1 \in W_1, \exists w_2 \in W_2, v = w_1 + w_2\}$$

と定め, W_1 と W_2 の和空間という. 上の定義はしばしば

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \,|\, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

などと略記される.

問４． W_1, W_2 が K-線型空間 V の K-線型部分空間であるとする.

1) 和空間 $W_1 + W_2$ は V の K-線型部分空間であることを示せ.
2) 共通部分 $W_1 \cap W_2$ は V の K-線型部分空間であることを示せ.
3) $\mathbb{R}^5$ の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{array} \text{ の解空間} \right\},$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{array} \text{ の解空間} \right\}.$$

で定めるとき，$W_1 + W_2$ を式で表し, その次元と基底のひとつを求めよ.

4) 3) において, $W_1 \cap W_2$ を式で表し, その次元と基底のひとつを求めよ.

問５． （参考：第１回目配布プリントの問 11,12）

1) K の元を成分とする m 行 n 列の行列全体の空間 $M_{m,n}(K)$ は行列の和と, 定数倍（K の元との積）により, K-線型空間であることを示せ. $M_{m,n}(K)$ は通常このように K-線型空間とみなす.
2) （K-線型空間としての）$M_{m,n}(K)$ の K 上の基底を一組与え, $M_{m,n}$ の K 上の次元を求めよ.

問６． V, W を（必ずしも K^n とは限らない）K-線型空間とし, V から W への K-線型写像全体を $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ であらわす. そして $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ に次のような演算を入れる：

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v),\ \ f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W),\ v \in V$$
$$(\lambda f)(v) = \lambda \cdot f(v),\ \ \lambda \in K,\ f \in \mathrm{Hom}_K(V, W),\ v \in V.$$

1) 上の演算に関して $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ は K-線型空間であることを示せ.
   注意：上のように定めた $f + g$, λf がそもそも $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ の元であるかどうかも確かめる必要がある. また, 第１回目の問 11,12 とは違い, $f + g$ や λf の定義にもはや行列表示は現れていないことにも注意せよ.

2) $V = K^n$, $W = K^m$ とする．$M_{m,n}(K)$ の元は, K^n から K^m への K-線型写像と１対１に対応するのであった．この対応が $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ と $M_{m,n}(K)$ の K-線型同型写像であることを示せ.

3) K^n の標準基底を $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, K^m の標準基底を $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ とする．このとき、次の性質を満たす K-線型写像 $\varphi_{ij} : K^n \to K^m$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, が一意的に存在することを示せ.

$$\varphi_{ij}(\mathbf{e}_k) = \begin{cases} \mathbf{f}_i & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

ヒント：$v \in K^n$ とすると, $v = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$ と一意にかけるのだから, 上の条件で v の像 $\varphi_{ij}(v)$ は定まってしまう．つまり φ_{ij} は写像としては定まってしまう．この写像 φ_{ij} が K-線型写像であるかどうかが問題である.

4) 3) で与えられる φ_{ij} は (i, j)-成分のみが 1 であるような $M_{m,n}(K)$ の元に対応することを示せ.

5) f を $V = K^n$ から $V = K^n$ 自身への K-線型写像とする．$\varphi \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ に対して, K^n から K^m への写像 $f^*\varphi$ を $(f^*\varphi)(v) = \varphi(f(v))$ と定める．このとき $f^*\varphi \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ であって, さらに対応 $\varphi \mapsto f^*\varphi$ は K-線型写像であることを示せ.

6) 5) において, f の表現行列を $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ とする．このとき 問４にあるように, φ_{ij} は $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ の K 上の基底であるので, これを認めたうえで f^* の φ_{ij} に関する行列表示を求めよ.

問７． （問６の続き）問６の φ_{ij} が $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ の基底であることを次にしたがって示せ.

方法 I

1) V,W を K-線型空間, $f : V \to W$ を K-線型同型写像とする．$e_1, \ldots, e_n$ が V の基底であれば $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ は W の基底であることを示せ.

2) 問６の 2), 4) を用いて, φ_{ij} が基底であることを示せ.

方法 II

3) $f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ とする．つまり f を K^n から K^m への K-線型写像とする．このとき,

$$f = \sum_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}} a_{ij}\varphi_{ij}$$

なる $a_{ij} \in K$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ が存在することを示せ.

4) $b_{ij} \in K$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ が

$$\sum_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}} b_{ij}\varphi_{ij} = 0$$

を満たすとすると, 任意の i, j について $b_{ij} = 0$ であることを示せ.

※ 3), 4) から $\{\varphi_{ij}\}$ は $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ の基底である．従って $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ は mn 次元である．

V,W が K^n とは限らない場合の $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ も重要であるが, これは後期で扱う予定である．

問８．

1) $V = \{$ 数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$ とする．$\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in V$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{a_i\}_{i=1}^{\infty} + \{b_i\}_{i=1}^{\infty} = \{a_i + b_i\}_{i=1}^{\infty},$$
$$\lambda\{a_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\lambda a_i\}_{i=1}^{\infty}$$

で定めるとき，V は $\mathbb{R}$-線型空間となることを示せ.

2) $W = \{\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in V \,|\, a_{i+2} - 5a_{i+1} + 6a_i = 0\}$ とする． 1) で定めた演算によって W は $\mathbb{R}$-線型空間となるが, このとき W は有限次元であることを示せ. また具体的な基底を一組与えよ.

3) 1) の V は $\mathbb{R}$ 上有限次元ではないことを示せ.