２００４年度数学 II 演習　　'04/6/9（水）２時限 (10:40〜12:10)

$K = \mathbb{R}$ もしくは $K = \mathbb{C}$ とする.

問１． 次の行列の行列式を求めよ.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$　2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$

問２． $M_n(K)$ の元 $P_n(i,j)$, $Q_n(i;\lambda)$, $R_n(i,j;\mu)$ を（講義と同様に）以下のように定める（ただし, $\lambda \neq 0$, $i \neq j$ とする）．すなわち, $P_n(i,j) = (p_{kl})$, $Q_n(i;\lambda) = (q_{kl})$, $R_n(i,j;\mu) = (r_{kl})$ とするとき,

$$p_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \neq i, j,\ (k,l) = (i,j),\ (k,l) = (j,i) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$q_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \neq i \\ \lambda & (k,l) = (i,i) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$r_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ \mu & (k,l) = (i,j) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

がそれぞれ成り立っているとする.

1) $\det P_n(i,j)$, $\det Q_n(i;\lambda)$, $\det R_n(i,j;\mu)$ を求めよ.
2) 行列の基本変形を用いて行列式を求める方法を考え, 説明せよ.
　ヒント：$A, B \in M_n(K)$ の時, $\det AB = \det A \det B$ が成り立つのであった.

問３． 行列式は多重線型性と交代性を持つ. このことを問２の行列 $P_n(i,j)$, $Q_n(i;\lambda)$, $R_n(i,j;\mu)$ と性質 $\det AB = \det A \det B$ （$A, B \in M_n(K)$）を用いて説明せよ.

問４． $v_1, \ldots, v_l \in K^n$ が K-上一次独立であるとは $a_1, \ldots, a_l \in K$ とするとき

$$a_1 v_1 + \cdots + a_l v_l = 0 \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_l = 0$$

が成り立つことであった. これにならって, $v_1, \ldots, v_l \in K^n$ が K-上一次従属であるということを数式（論理式）で表せ.
ヒント：上の論理式は

$$\forall a_1, \ldots, a_l \in K, (a_1 v_1 + \cdots + a_l v_l = 0 \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_l = 0)$$

と読み替えることができる.

問5． (l,k) 型の行列 A の区分けとは，A を

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix}$$

のように，より小さい型の行列たちを用いて表すことである．ここで，A_{ij} はそれぞれ (l_i,k_j) 型の行列で，$l=l_1+\cdots+l_p$, $k=k_1+\cdots+k_q$ である．一方，(k,m) 型の行列 B を

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{q1} & B_{q2} & \cdots & B_{qr} \end{pmatrix}$$

と，各 B_{ij} が (k_i,m_j) 型の行列となるように区分けする．ここで, A の列の区分けと，B の行の区分けの仕方が一致していることに注意せよ．このとき, 行列 $C=AB$ は (l,m) 型の行列であることに注意して

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pr} \end{pmatrix}$$

と，各 C_{ij} が (l_i,m_j) 型の行列となるように区分けすると,

$$C_{ij}=\sum_{t=1}^{k} A_{it}B_{tj}$$

であることを示せ.

問6． 行列 A が

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix}$$

のように区分けされているとき．${}^tA$ を A_{ij} を用いて表せ.

問7． 行列の区分けを用いて，5/12 の **問11** を以下の手順で示せ.（ヒント：正方行列を行，列ともに $1+(n-1)$ の型で区分けをして n に関する帰納法を使う.）

i) 二つの上三角行列の積はまた上三角行列になることを示す.

ii) A の (i,i) 成分を a_{ii} とすると，A^p の (i,i) 成分は a_{ii}^p となることを示す.

iii) 問の主張を示す.

問 8． $A \in M_n(K)$ が $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ と区分けされているとする．ここで $A_{11} \in M_{n_1}(K)$, $A_{22} \in M_{n_2}(K)$ とする.

1) A_{12}, A_{21} のサイズを求めよ.

2) $A_{21} = 0$ のとき, $\det A = \det A_{11} \det A_{22}$ であることを示せ.

問 9．

1) $A \in M_n(\mathbb{R})$ が $A^t A = I_n$ を満たすとすると, A は正則であって, $\det A = \pm 1$ であることを示せ.

2) $A \in M_n(\mathbb{C})$ が $A^t \overline{A} = I_n$ を満たすとすると, A は正則であって, $|\det A| = 1$ であることを示せ.

問 10． 任意の n 次の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ はいくつかの互換の積で表されることを示せ.
ヒント：たとえば次のように考えることができる．まず $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ を $1, 2, \ldots, n$ に並べ替える置換を互換の積として表す（これは実は易しい）．この置換は σ^{-1} であるはずなので, その逆写像を考えれば $\sigma = (\sigma^{-1})^{-1} = (\text{互換の積})^{-1}$ と書けたことになる. 右辺が実は互換の積として書けることを示せばよい（これも実は易しい）.

問 11． $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して, K-線型写像 $f_\sigma : K^n \to K^n$ を

$$f_\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ x_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

で定める. f_σ を行列表示し, その行列を F_σ とするとき $\det F_\sigma$ を求めよ.

問 12． $A \in M_n(K)$ を列ベクトルにより $A = (a_1, \ldots, a_n)$ と表す.

1) $a_1, \ldots, a_n$ が K 上一次従属であれば, $\det A = 0$ であることを示せ.

2) $a_1, \ldots, a_n$ が K 上一次独立であれば, $\det A \neq 0$ であることを示せ.

ヒント：たとえば行列の基本変形を用いる.