２００４年度数学 II 演習　　　　　　　　　　'04/4/21（水）２時限目

$K=\mathbb{R}$ もしくは $K=\mathbb{C}$ とする.

注. よく分からなくなってしまったら最初はいつも K を $\mathbb{R}$ と読み替え, K^n は $\mathbb{R}^n$ あるいは $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ 位に思っておき, 改めて一般の場合を考えてみよ.

定義（線型空間の公理）. 空でない集合 V が次を満たすとき, V を K-線型空間と言う.

I) V の任意の二元 v,w について, v と w の和と呼ばれる V の元 $v+w$ が定まり, 次を満たす.
   1) $\forall v,w,z\in V$, $(v+w)+z=v+(w+z)$,
   2) $\forall v,w\in V$, $v+w=w+v$,
   3) 零ベクトルと呼ばれる元 o が V に存在し, $\forall v\in V$, $v+o=v$ が成り立つ.
      ※この o は唯一であることは証明できることなので, 公理に入れても入れなくても良い.
   4) V の任意の元 v に対して、ある V の元 w が存在し、$v+w=o$ を満たす.
      ※この w は唯一であることが証明されるので, $-v$ と書く. 実は $-v=(-1)v$ である.

II) V の任意の元 v と, K の任意の元 λ について, v の λ 倍と呼ばれる V の元 λv が定まり, 以下を満たす.
   5) $\forall\lambda,\mu\in K,\forall v\in V$, $(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$,
   6) $\forall\lambda\in K,\forall v,w\in V$, $\lambda(v+w)=\lambda v+\lambda w$,
   7) $\forall\lambda,\mu\in K,\forall v\in V$, $(\lambda\mu)v=\lambda(\mu v)$,
   8) $\forall v\in V$, $1v=v$.

問１. V が K-線型空間であるとき, $\forall v\in V$, $0v=o$ を示せ.

問２. $o={}^t(0\ 0\ \cdots\ 0)\in K^n$ とすると, $\{o\}$ は K-線型空間であることを示せ.

問３. （いろいろな線型空間 I）

1) $\mathbb{C}$ は通常の和と積に関して $\mathbb{C}$-線型空間であることを確かめよ.
2) $v,w\in\mathbb{C}$ に対して $v+w$ を通常の和, $v\in\mathbb{C}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ について $\lambda\times v$ を通常の積として定める. このとき $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ.
3) $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $\varphi(z)=\bar{z}$ と定めると, これは $\mathbb{R}$-線型写像ではあるが, $\mathbb{C}$-線型写像ではないことを示せ.

問４. （いろいろな線型空間 II）

1) $\mathbb{R}^\times=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$ とする. $t,s\in\mathbb{R}^\times$ のとき $t\oplus s=ts$（右辺は実数の積）と定め, $\lambda\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}^\times$ のとき $\lambda\otimes t=t^\lambda$（実数の冪乗）と定める. このとき、$\mathbb{R}^\times$ は演算 $\oplus$, $\otimes$ に関して $\mathbb{R}$-線型空間であることを確かめよ.

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^\times$ を $f(x)=e^x$ で定める．$\mathbb{R}$ を自然な線型空間とみなし，$\mathbb{R}^\times$ を 1) の方法で線型空間とみなすと，f は線型写像であることを示せ．
3) 1) の真似を $M_2(\mathbb{R})$ に対して行おうとして，$A,B\in M_2(\mathbb{R})$ のとき，$A\oplus B=AB$（右辺は行列の積）であるような線型空間の構造を考えようと思ってもうまくいかないことを示せ．

問5． θ を実数とし，φ_θ で $\mathbb{R}^2$ の正の向き（反時計回り）の θ 回転を表す．

1) φ_θ は $\mathbb{R}$-線型写像であることを示し，行列表示を求めよ．
2) φ_θ は $\mathbb{R}$-線型同型写像であることを示せ．
3) $z\in\mathbb{C}$ とするとき，$z=x+\sqrt{-1}y$, $x,y\in\mathbb{R}$ と書いて $\psi_\theta(z)=\varphi_\theta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ と定める．ここで，$\lambda=\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta\in\mathbb{C}$ とすると，$\psi_\theta(z)=\lambda z$ であることを示せ．但し，$z\in\mathbb{C}$ は $z=x+\sqrt{-1}y$, $x,y\in\mathbb{R}$ と実数を用いて表し，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ と書き改めて $\mathbb{R}^2$ の元とみなす．

問6． $f_{\theta,\varphi}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を

i) まず $\mathbb{R}^3$ を y 軸を軸として φ だけ負の向きに回転し，
ii) 次いで $\mathbb{R}^3$ を z 軸を軸として θ だけ正の向きに回転させる

という写像とする．

1) $f_{\theta,\varphi}$ は $\mathbb{R}$-線型写像であることを示し，行列で表示せよ．
2) $y=x$, $z=0$, で与えられる直線を軸とする π 回転を g であらわすと，g は $\mathbb{R}$-線型写像であることを示し，その行列表示を求めよ．余裕があれば π 回転のみではなく，一般の θ 回転についても調べよ．
ヒント：うまく θ,φ を定めると，$f_{\theta,\varphi}$ は z 軸を直線 $y=x,z=0$ に写す．この $f_{\theta,\varphi}$ は $\mathbb{R}$-同型写像であることを確かめ，$f_{\theta,\varphi}\circ g\circ f_{\theta,\varphi}^{-1}$ を考えてみよ．

問7． （いろいろな線型空間III） $a,b\in\mathbb{R}$ とし，$V=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,\middle|\, a\dfrac{df}{dx}+bf=0\right\}$ とする．ここで式中の x は変数であって，また，‘0’ は恒等的に 0 であるような函数を表す．このとき V は $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ．

問8． V を $\mathbb{R}$-線型空間とし，f を $\mathbb{R}^3$ から V への $\mathbb{R}$-線型写像とする．

$$x=f\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix},\ y=f\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix},\ z=f\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

とするとき，

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

を求めよ．

問 9． $A, P, Q \in M_n(K)$ とする．

1) $PA = I_n$ かつ $AQ = I_n$ ならば，$P = Q$ であることを示せ．
2) ある定数 $\alpha, \beta, \gamma \in K$ に対して，

$$\alpha A^3 + \beta A^2 + \gamma A = O$$

であるとする（ただし $\gamma \neq 0$）．もし，$PA = I_n$ を満たす P が存在すれば，$AP = I_n$ であることを示せ．

問 10． ${}^t(x\ y) \in \mathbb{R}^2$ に対し, $x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}$ を対応させる写像を f とする．つまり, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ であって, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + \sqrt{-1}y$ である．

1) この f は $\mathbb{R}$-線型同型写像であることを示せ．f^{-1} の具体的な表示も求めよ（f^{-1} を式で表せ）．
2) $\mathbb{R}^2$ に次のように $\mathbb{C}$ の元との積を, $v \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$ のとき

$$\lambda v = f^{-1}(\lambda f(v))$$

として定める．（つまり，$v \in \mathbb{R}^2$ について $f(v)$ は $\mathbb{C}$ の元であるので, λ との積を複素数の積として定めることが出来る．$\lambda f(v)$ は再び $\mathbb{C}$ の元であるから, 1) により $f^{-1}(\lambda f(v))$ を考えることが出来る．これを λv とする．）$\lambda = a + \sqrt{-1}b$, $v = {}^t(x\ y)$ とするとき, 上で定めた λv を a, b, x, y で表せ．

問 11． 講義でも扱ったように, K^n から K^m への任意の K-線型写像 f は, $M_{m,n}(K)$ のある元 A_f を用いて $f(v) = A_f v$ と一意的にあらわされる．ここで, $M_{m,n}(K)$ は行列の和, K の元との積により K-線型空間であったから,

i) f, g を K^n から K^m への K-線型写像とするとき，$f + g$ を (m, n)-行列 $A_f + A_g$ で表される K-線型写像
ii) f を K^n から K^m への K-線型写像, $\lambda \in K$ とするとき，λf を λA_f で表される K-線型写像

としてそれぞれ定める．このとき,

1) $v \in K^n$ について $(f + g)(v)$ を $f(v), g(v)$ のみで表せ．
2) $v \in K^n$, $\lambda \in K$ について $(\lambda f)(v)$ を $f(v), \lambda$ のみで表せ．

問 12．（いろいろな線型空間IV）$\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ で K^n から K^m への K-線型写像全体の集合を表す．

1) 問 11 の演算で $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ は K-線型空間になることを示せ．
2) 更に, 問 11 で与えられる $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ の元と $M_{m,n}(K)$ の元の対応は K-線型同型であることを示せ．