

## 講演の予定

1日目: 非エルミートバンドの例外点と対称性

2日目: 平衡強相関係系における準粒子と例外点

3日目: 強相関効果に対する安定性

“1体のハミルトニアン”

# 講演の予定(2日目)

～平衡強相関係系における準粒子と例外点～

1日目の復習と今回の概要

グリーン関数と準粒子

準粒子励起における例外点と対称性

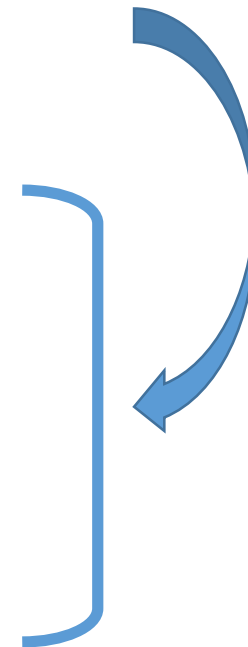
# 講演の予定(2日目)

## ～平衡強相関係における準粒子と例外点～

1日目の復習と今回の概要

グリーン関数と準粒子

準粒子励起における例外点と対称性



1日目の議論  
を適用

# 講演の予定(2日目)

～平衡強相関係における準粒子と例外点～



1日目の復習と今回の概要

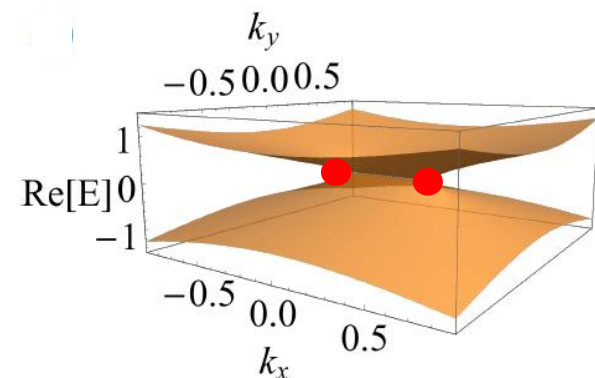
グリーン関数と準粒子

準粒子励起における例外点と対称性

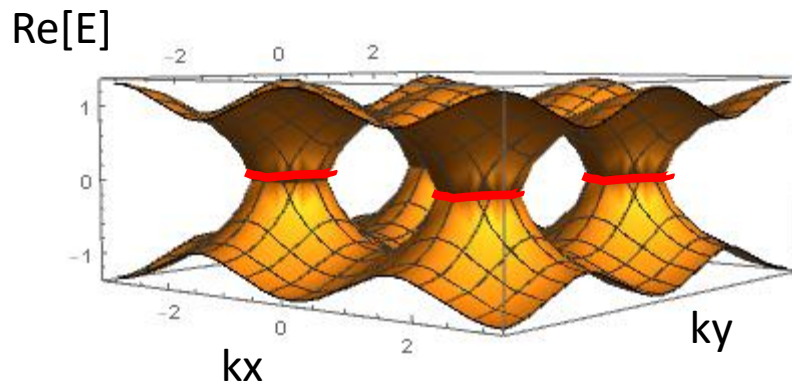
# 1日目の復習

例外点:

- ・エネルギーの実部・虚部でバンドタッチを起こす点
- ・摂動に対し安定(点ギャップトポロジーによる保護)

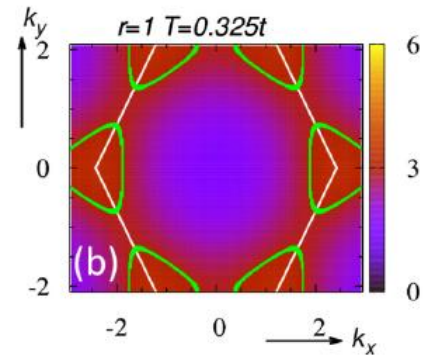
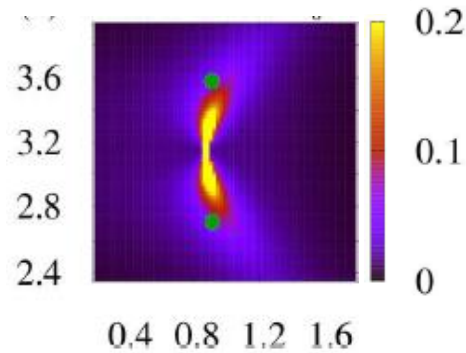


Dimension	1	2	3
No symmetry	—	point	loop
With chiral symmetry	point	ring	surface



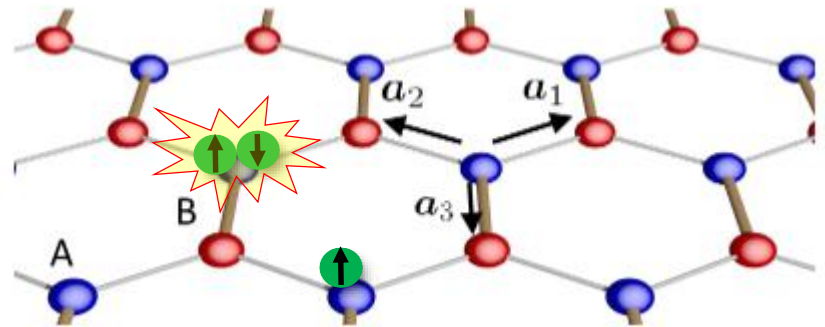
# 今回の概要

平衡系の準粒子励起で例外点が見られる。



$$G^{-1}(\omega, \vec{k}) : \\ = (\omega - h(\vec{k}) - \Sigma(\omega, \vec{k}))$$

非エルミート行列



# 講演の予定(2日目)

～平衡強相関係における準粒子と例外点～

1日目の復習と今回の概要



グリーン関数と準粒子

準粒子励起における例外点と対称性

## スペクトラルウエイトの定義

$$A(\omega, \mathbf{k}) = -\text{Im} \sum_{\alpha} G_{\alpha\alpha}(\omega + i\delta, \mathbf{k})/\pi$$

$$G_{\alpha\beta}^{\text{R}}(t, \mathbf{k}) = -i\langle \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}(t)\hat{c}_{\mathbf{k}\beta}^{\dagger}(0) + \hat{c}_{\mathbf{k}\beta}^{\dagger}(0)\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}(t) \rangle \theta(t)$$

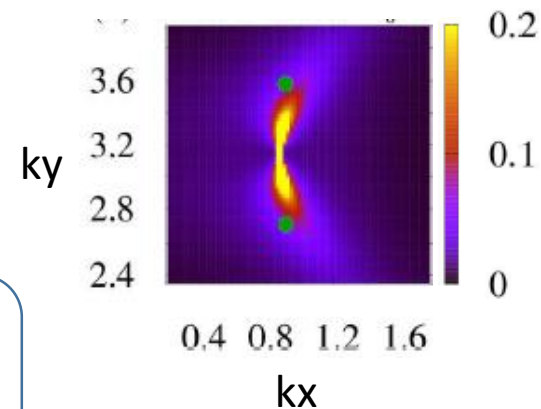
スペクトラルウエイトは  
準粒子のバンド構造を記述する。

$$\langle \cdot \rangle := \text{tr}(\cdot e^{-\beta\hat{H}})/Z$$

$$Z := \text{tr}(e^{-\beta\hat{H}})$$

$$\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger}(t) := e^{i\hat{H}t}\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger}e^{-i\hat{H}t}$$

## <スペクトラルウエイト>





## スペクトラルウエイトの定義

$$A(\omega, \mathbf{k}) = -\text{Im} \sum_{\alpha} G_{\alpha\alpha}(\omega + i\delta, \mathbf{k})/\pi$$

$$G_{\alpha\beta}^R(t, \mathbf{k}) = -i\langle \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}(t)\hat{c}_{\mathbf{k}\beta}^{\dagger}(0) + \hat{c}_{\mathbf{k}\beta}^{\dagger}(0)\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}(t) \rangle \theta(t)$$

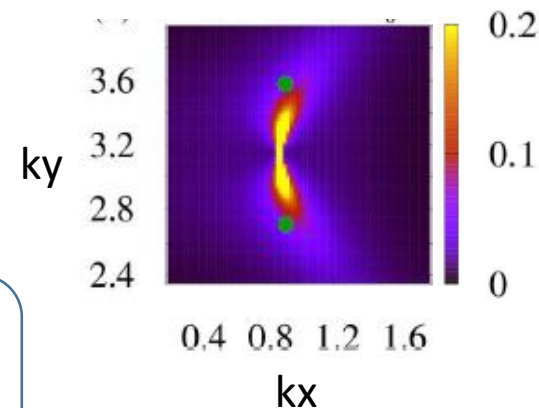
スペクトラルウエイトは  
準粒子のバンド構造を記述する。

$$\langle \cdot \rangle := \text{tr}(\cdot e^{-\beta\hat{H}})/Z$$

$$Z := \text{tr}(e^{-\beta\hat{H}})$$

$$\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger}(t) := e^{i\hat{H}t}\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger}e^{-i\hat{H}t}$$

## <スペクトラルウエイト>



具体例: スピンレスフェルミオン(相互作用無し、1バンド)

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon(\mathbf{k}) \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{c}_{\mathbf{k}} \quad \longrightarrow \quad G^R(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega + i\delta - \epsilon_{\mathbf{k}}}$$

$\therefore$

$$\hat{c}_{\mathbf{k}}(t) = e^{-i\epsilon t} \hat{c}_{\mathbf{k}}$$

$$G^R(t, \mathbf{k}) = -ie^{-i\epsilon t} \langle \{c_{\mathbf{k}}, c_{\mathbf{k}}^{\dagger}\} \rangle \theta(t) = -ie^{-i\epsilon t} \theta(t)$$

具体例続き: スピンレスフェルミオン(相互作用無し、1バンド)

$$A(\omega, \mathbf{k}) = -\text{Im} \sum_{\alpha} G_{\alpha\alpha}(\omega + i\delta, \mathbf{k})/\pi.$$

$$G^R(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega + i\delta - \epsilon_{\mathbf{k}}}$$



$$A(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\delta}{\pi[(\omega - \epsilon)^2 + \delta^2]} \rightarrow \delta(\omega - \epsilon)$$

# 具体例続き: スピンレスフェルミオン(相互作用無し、1バンド)

$$A(\omega, \mathbf{k}) = -\text{Im} \sum_{\alpha} G_{\alpha\alpha}(\omega + i\delta, \mathbf{k})/\pi.$$

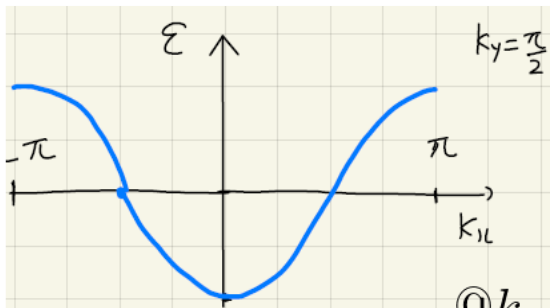
$$G^R(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega + i\delta - \epsilon_{\mathbf{k}}}$$



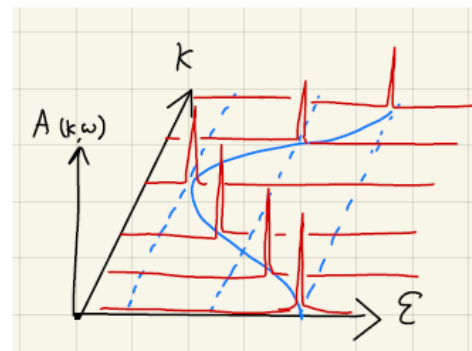
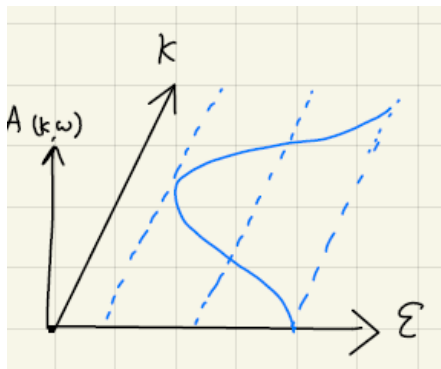
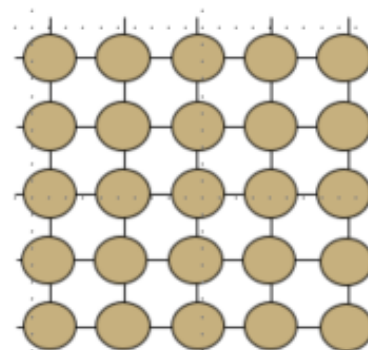
$$A(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\delta}{\pi[(\omega - \epsilon)^2 + \delta^2]} \rightarrow \delta(\omega - \epsilon)$$

## 正方格子模型

$$\epsilon(k_x, k_y) = -2t(\cos k_x + \cos k_y)$$



@  $k_y = \pi/2$



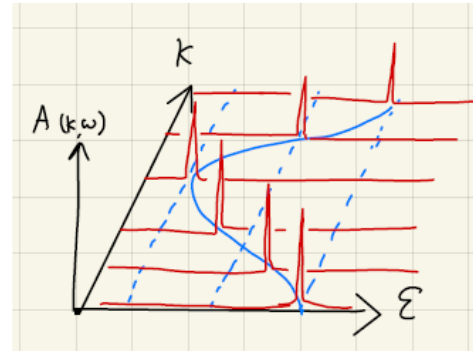
自由粒子系(1バンド)

$$G^{-1}(\omega, \vec{k}) = [\omega + i\delta - \epsilon(\vec{k})]$$

スペクトルがδ 関数的



無限の寿命をもつ粒子



スペクトラルウェイトは  
準粒子のバンド構造を記述する。

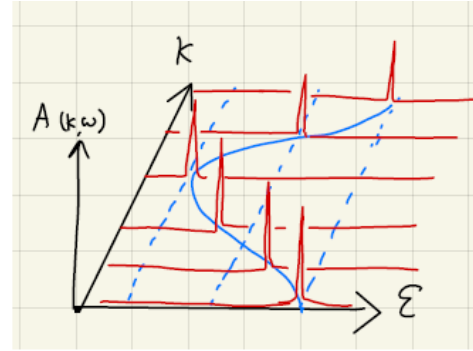
## 自由粒子系(1バンド)

$$G^{-1}(\omega, \vec{k}) = [\omega + i\delta - \epsilon(\vec{k})]$$

スペクトルがδ 関数的



無限の寿命をもつ粒子



スペクトラルウェイトは  
準粒子のバンド構造を記述する。

粒子間の相互作用があると...

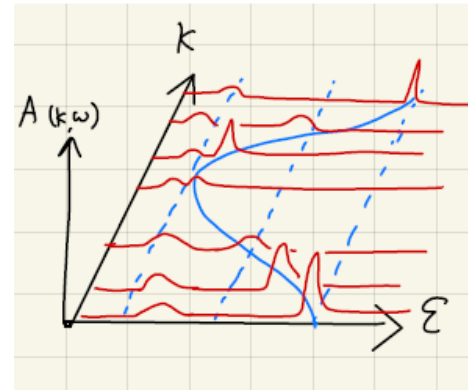
$$G^{-1}(\omega, \vec{k}) = [\omega - \epsilon(\vec{k}) - \Sigma(\omega + i\delta)]$$

$$\text{Im } \Sigma(\omega + i\delta) \leq 0$$

スペクトルがぼやける



有限の寿命をもつ準粒子



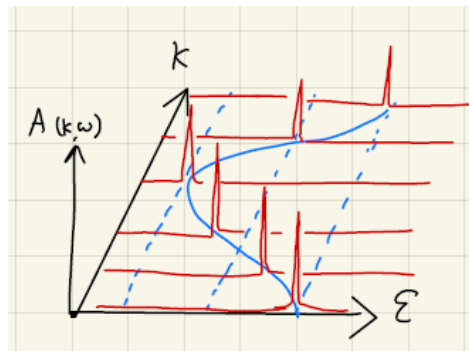
## 自由粒子系(1バンド)

$$G^{-1}(\omega, \vec{k}) = [\omega + i\delta - \epsilon(\vec{k})]$$

スペクトルがδ 関数的



無限の寿命をもつ粒子



スペクトラルウェイトは  
準粒子のバンド構造を記述する。

粒子間の相互作用があると...

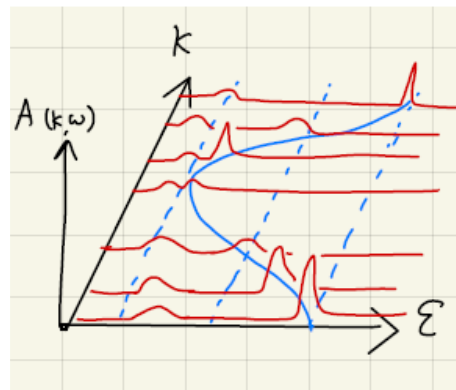
$$G^{-1}(\omega, \vec{k}) = [\omega - \epsilon(\vec{k}) - \Sigma(\omega + i\delta)]$$

$$\text{Im } \Sigma(\omega + i\delta) \leq 0$$

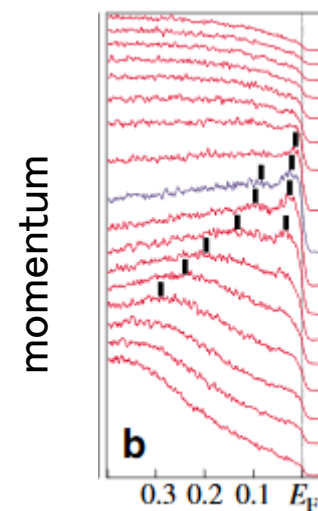
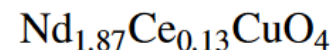
スペクトルがぼやける



有限の寿命をもつ準粒子



### ARPES測定



H. Matsui et al.,  
PRL (2005)

## 多バンド系の場合

$$A(\omega, \mathbf{k}) = -\text{Im} \sum_{\alpha} G_{\alpha\alpha}(\omega + i\delta, \mathbf{k})/\pi,$$

$$G^{-1}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) = (\omega + i\delta)\mathbb{1} - h(\mathbf{k}) - \Sigma(\omega + i\delta, \mathbf{k})$$

## 多バンド系の場合

$$A(\omega, \mathbf{k}) = -\text{Im} \sum_{\alpha} G_{\alpha\alpha}(\omega + i\delta, \mathbf{k})/\pi,$$

$$G^{-1}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) = (\omega + i\delta)\mathbb{1} - h(\mathbf{k}) - \Sigma(\omega + i\delta, \mathbf{k})$$

$$G^{-1}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) = (\omega + i\delta)\mathbb{1} - H_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k})$$

$$H_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k}) = h(\mathbf{k}) + \Sigma(\omega + i\delta, \mathbf{k})$$

$$\Sigma_{\alpha\beta}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) \in \mathbb{C}$$



## 多バンド系の場合

$$A(\omega, \mathbf{k}) = -\text{Im} \sum_{\alpha} G_{\alpha\alpha}(\omega + i\delta, \mathbf{k})/\pi,$$

$$G^{-1}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) = (\omega + i\delta)\mathbb{1} - h(\mathbf{k}) - \Sigma(\omega + i\delta, \mathbf{k})$$

$$G^{-1}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) = (\omega + i\delta)\mathbb{1} - H_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k})$$

$$H_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k}) = h(\mathbf{k}) + \Sigma(\omega + i\delta, \mathbf{k})$$

$$\Sigma_{\alpha\beta}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) \in \mathbb{C}$$

非エルミート行列

これまでは、1バンドの場合と同様と思われてきたが、  
例外点の発現が明らかになってきた。

# 講演の予定(2日目)

～平衡強相関係系における準粒子と例外点～

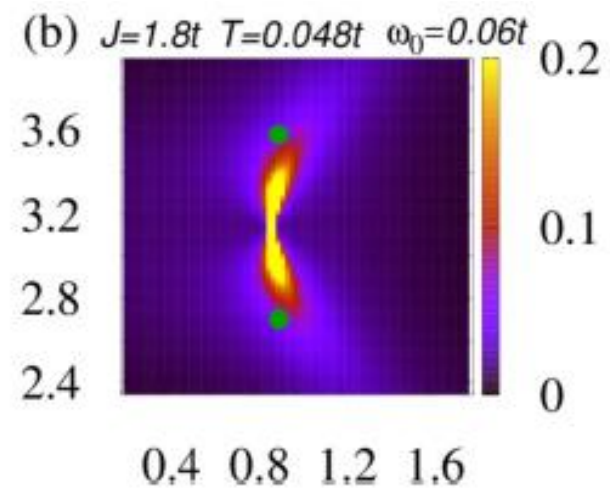
1日目の復習と今回の概要

グリーン関数と準粒子



準粒子励起における例外点と対称性

## 対称性の無い場合



# Set up

## 2次元近藤格子模型

$$H = \sum_{\langle ij \rangle s \alpha \beta} t_{i\alpha, j\beta} c_{i\alpha s}^\dagger c_{j\beta s} + \sum_i J s_i \cdot S_i,$$

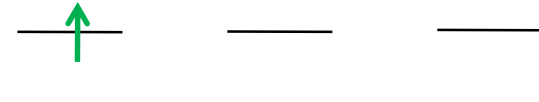
$$\hat{h}(\mathbf{k}) = d_z(\mathbf{k})\tau_z + d_x(\mathbf{k})\tau_x,$$

※  $\mathcal{T}$  は軌道のパウリ行列

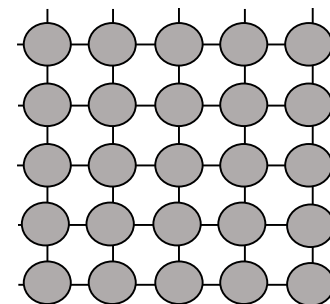
軌道 a



軌道 b



局在スピ

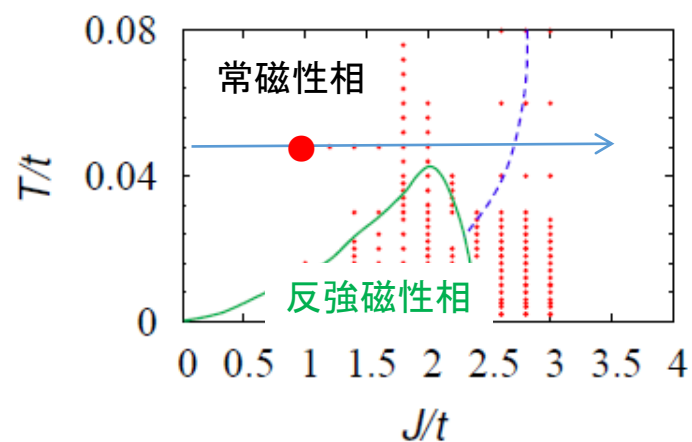
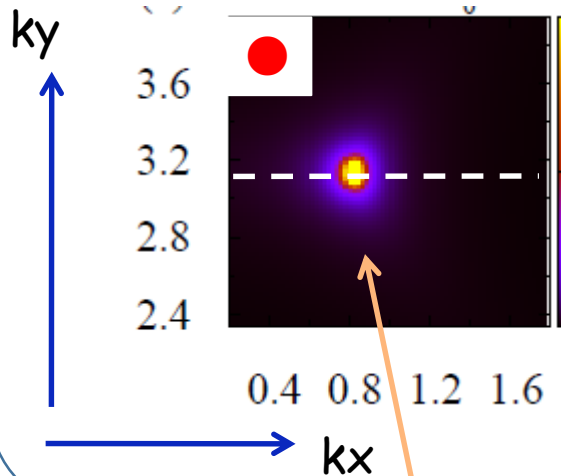


## 数値計算手法

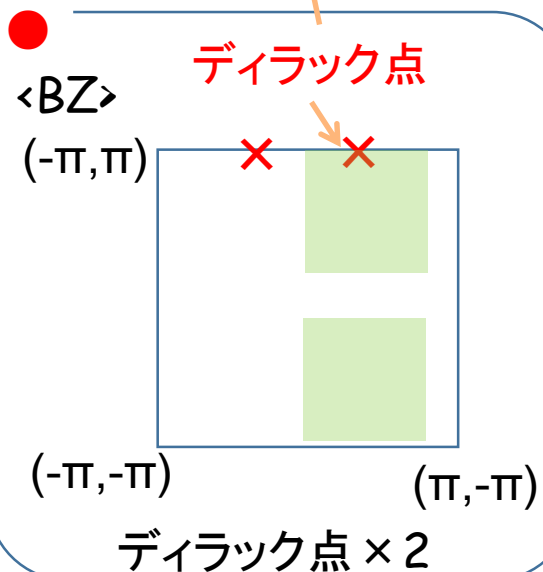
動的平均場理論 + 数値繰り込み群法

# 重い電子系における例外点

スペクトルウェイト @  $\omega \sim 0$

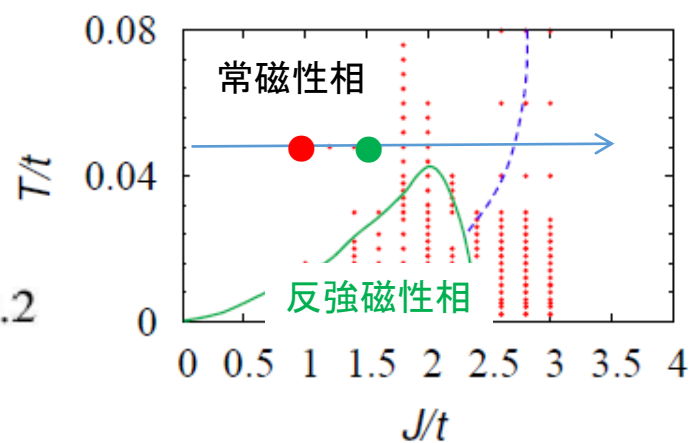
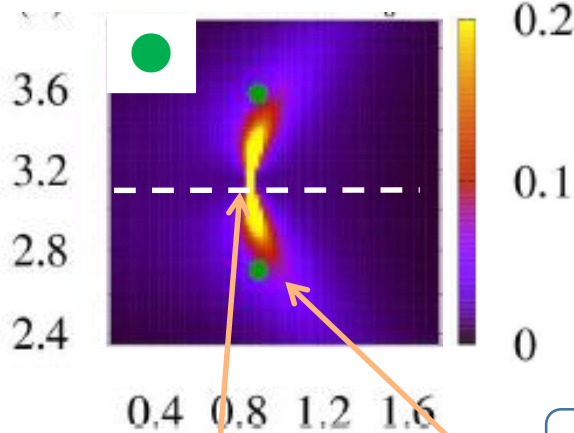
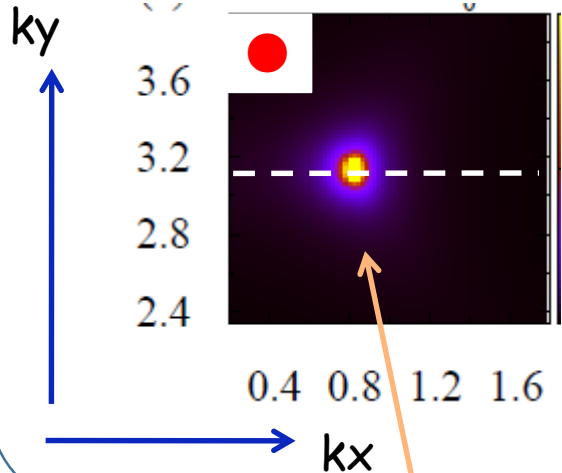


$$A(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{1}{\pi} \text{Im}[\text{tr}G^R(\omega, \mathbf{k})]$$

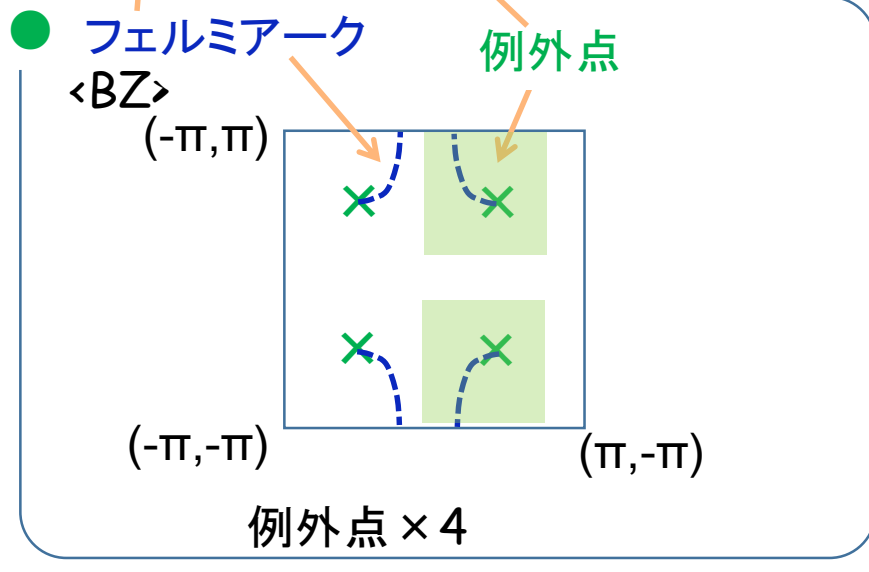
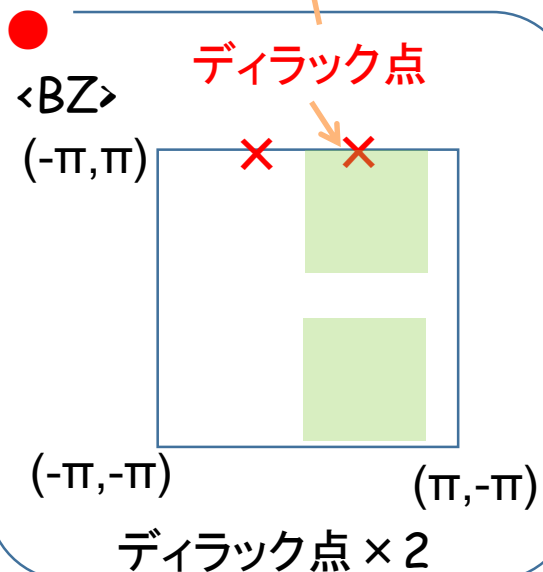


# 重い電子系における例外点

スペクトルウェイト @  $\omega \sim 0$



$$A(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{1}{\pi} \text{Im}[\text{tr}G^R(\omega, \mathbf{k})]$$



# まとめ: 対称性の無い重い電子系

## 準粒子の寿命による例外点の発現

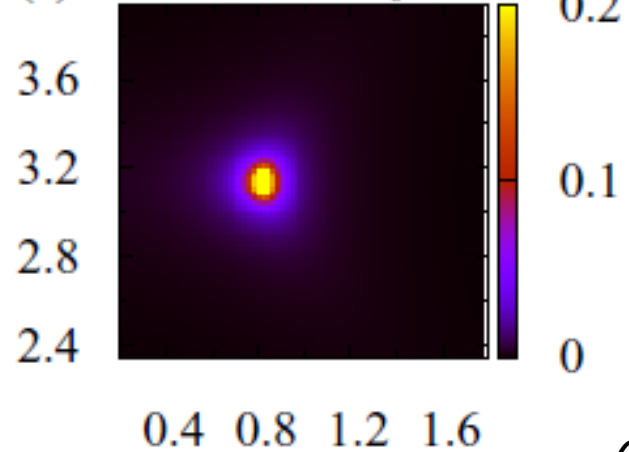
[ディラック点] ×1



近藤効果

[例外点] ×2

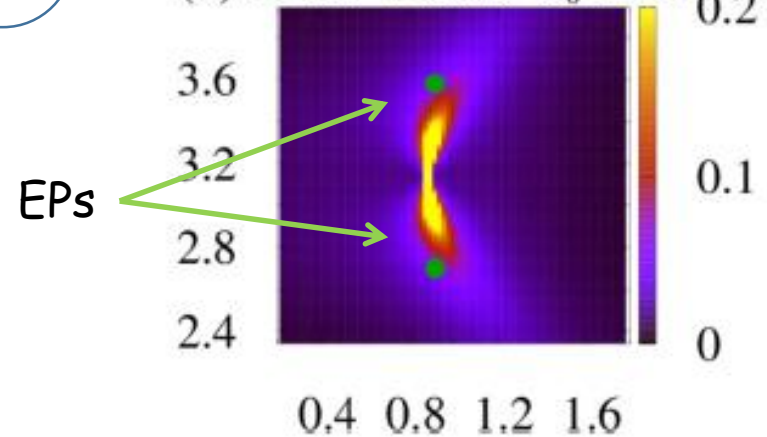
(a)  $J=t$   $T=0.048t$   $\omega_0=0.022t$



weak

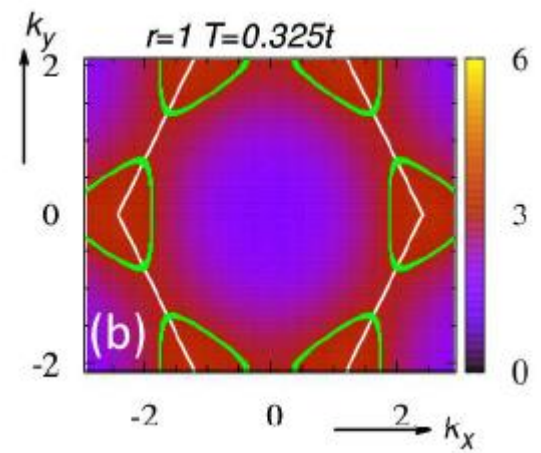
Coupling  $J$

(b)  $J=1.8t$   $T=0.048t$   $\omega_0=0.06t$



strong

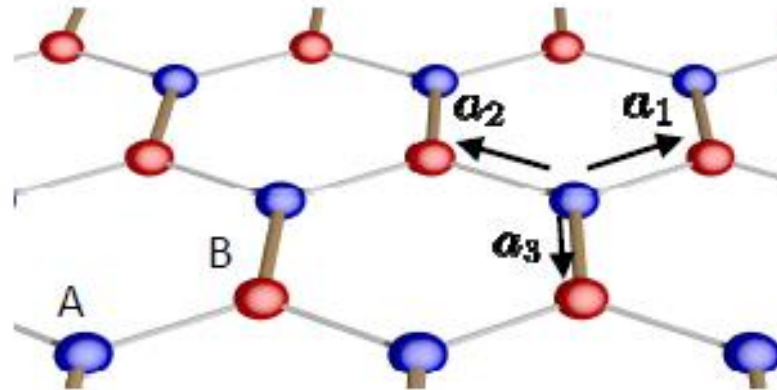
# カイラル対称性な系





Set up

蜂の巣格子の拡張ハバード模型



$$\hat{H} = \sum_{\langle is, js' \rangle \sigma} t_{is, js'} \hat{c}_{is\sigma}^\dagger \hat{c}_{js'\sigma} + \sum_{is} U_s (\hat{n}_{is\uparrow} - \frac{1}{2})(\hat{n}_{is\downarrow} - \frac{1}{2}),$$

相互作用の強さが副格子ごとに異なる

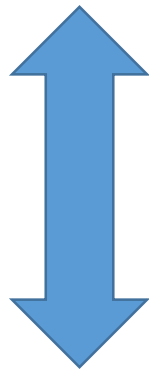
$$U_A > U_B$$

多体のカイラル対称性  $\hat{\Gamma} \hat{H} \hat{\Gamma}^{-1} = \hat{H}$

$$\hat{\Gamma} = \prod_{js} \left( \hat{c}_{js\uparrow}^\dagger + \text{sgn}(s) \hat{c}_{js\uparrow} \right) \left( \hat{c}_{js\downarrow}^\dagger + \text{sgn}(s) \hat{c}_{js\downarrow} \right) \mathcal{K},$$

多体のカイラル対称性は以下の条件を有効ハミルトニアン@ $\omega=0$ に課す。

$$H_{\text{eff}}(0, \vec{k}) = -U_{\Gamma}^{\dagger} H_{\text{eff}}^{\dagger}(0, \vec{k}) U_{\Gamma}$$

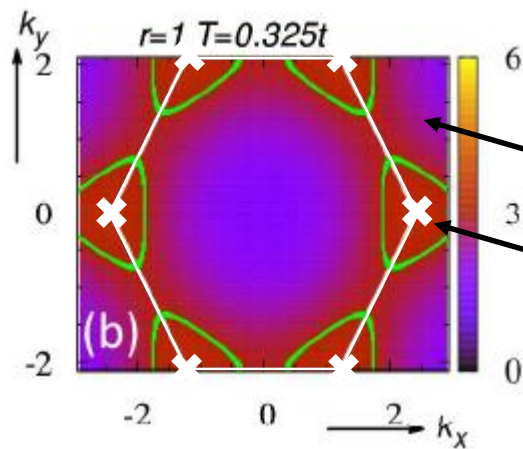
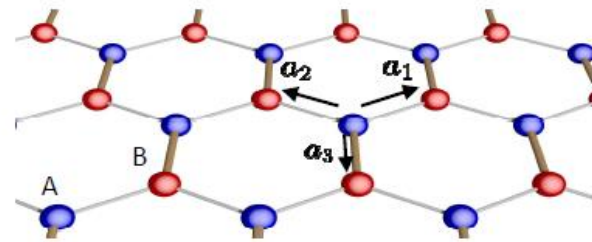


$$H_{\text{eff}}(\omega, \vec{k}) = h(\mathbf{k}) + \Sigma(\omega + i\delta)$$
$$U_{\Gamma} = \tau_3 \quad (\text{副格子空間のパウリ行列})$$

cf. 1日目に議論したカイラル対称性

$$\tau_3 H^{\dagger}(\mathbf{k}) \tau_3 = -H(\mathbf{k})$$

スペクトラルウェイト  $-\text{Im}[\text{tr}G^R(\omega = 0, \mathbf{k})]/\pi$   
 $(U_A, U_B) = (10t, 5t)$

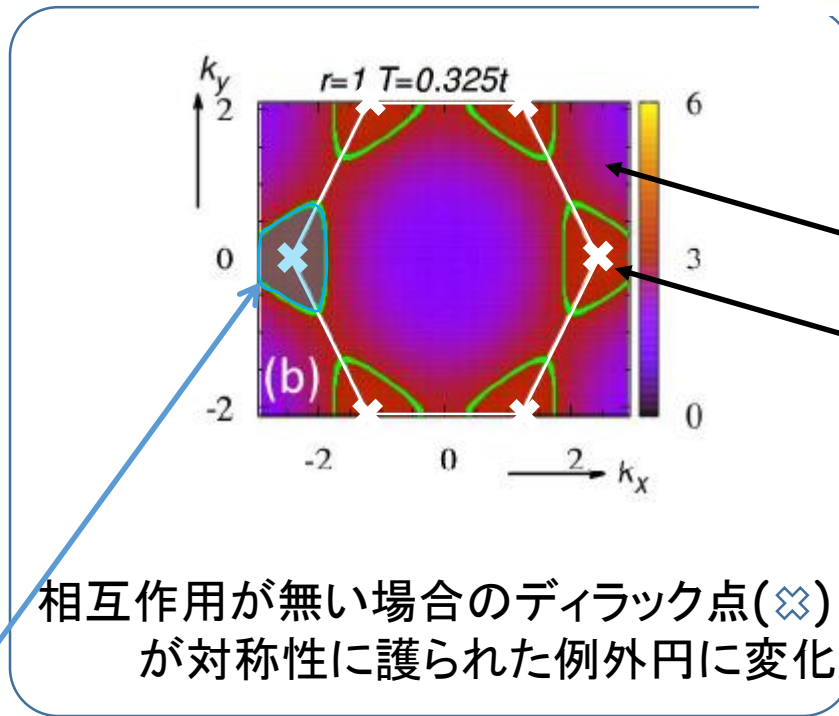
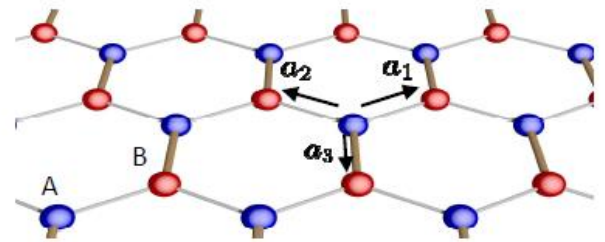


$N_{\text{och}}=0$

$N_{\text{och}}=-1$

相互作用が無い場合のディラック点(⊗)  
 が対称性に護られた例外円に変化

スペクトラルウェイト  $-\text{Im}[\text{tr}G^R(\omega = 0, \mathbf{k})]/\pi$   
 $(U_A, U_B) = (10t, 5t)$



$N_{\text{och}}=0$

$N_{\text{och}}=-1$

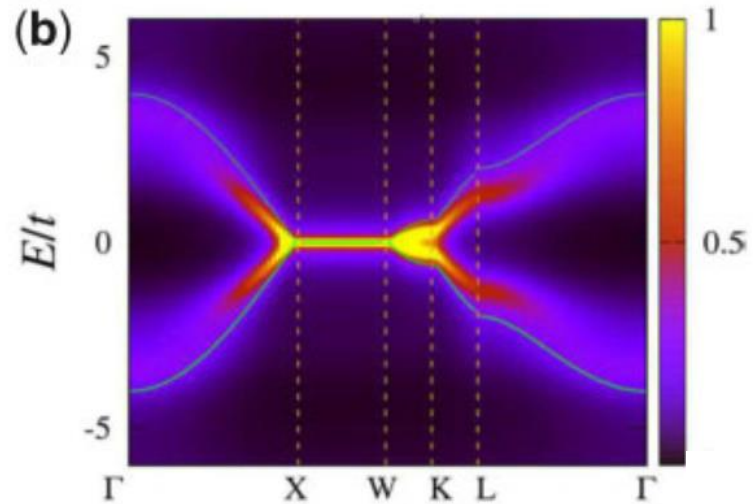
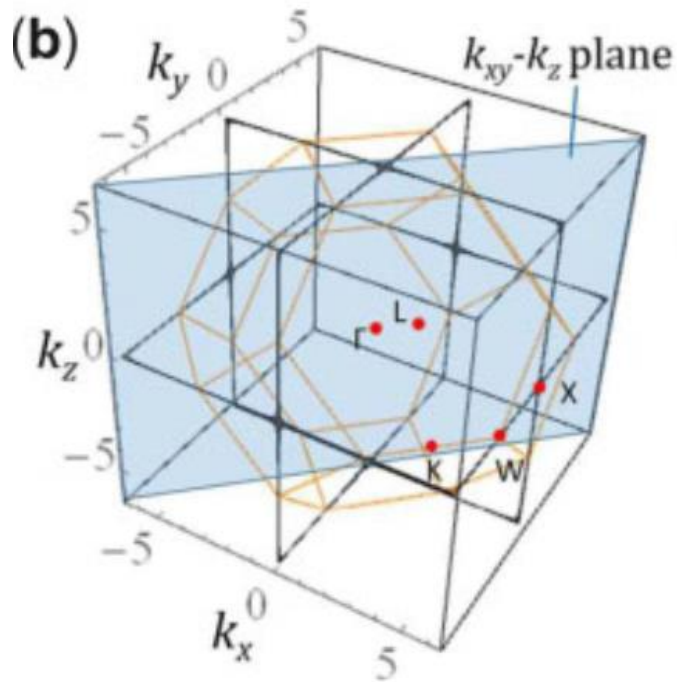
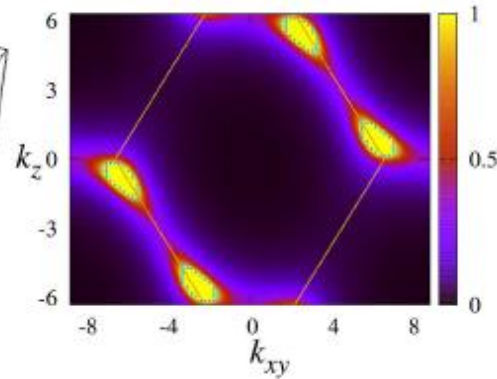
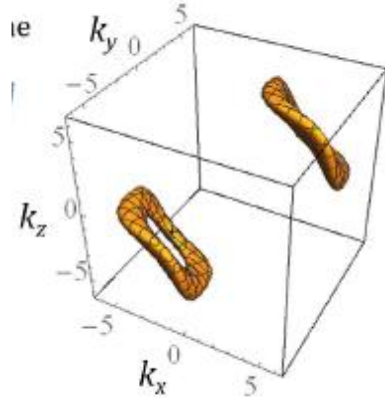
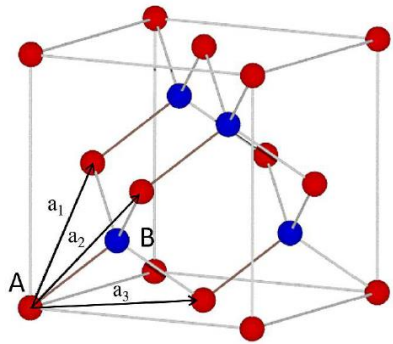
相互作用が無い場合のディラック点(⊗)  
 が対称性に護られた例外円に変化

例外円の内部ではギャップが純虚数



フェルミプレーンが発現

# 対称性に護られた例外面@三次元ダイヤモンド格子系



10-fold way classifications of exceptional points in correlated systems (@ $\omega=0$ )

$$\widehat{PT}\widehat{H}\widehat{PT}^{-1} = \widehat{H}$$

$$\widehat{PT} = \widehat{U}_{PT}\mathcal{K},$$

$$\widehat{U}_{PT}\widehat{c}_{i\alpha}^\dagger\widehat{U}_{PT}^\dagger = \sum_{\beta} \widehat{c}_{-i\beta}^\dagger U_{PT,\beta\alpha}$$



$$H_{\text{eff}}(\omega + i\delta, \mathbf{k})$$

$$= U_{PT}H_{\text{eff}}^T(\omega + i\delta, \mathbf{k})U_{PT}^\dagger$$

$\delta - 1$  dim. of the topo. invariant

Symmetry class	$PT$	$CP$	$\Gamma$	Homotopy	$\delta = 1$	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0	0	$\pi_0(C_\delta)$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
AIII	0	0	1	$\pi_0(C_{\delta+1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
AI	1	0	0	$\pi_0(R_{\delta+6})$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0
BDI	1	1	1	$\pi_0(R_{\delta+7})$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0
D	0	1	0	$\pi_0(R_\delta)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$
DIII	-1	1	1	$\pi_0(R_{\delta+1})$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$
AII	-1	0	0	$\pi_0(R_{\delta+2})$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
CII	-1	-1	1	$\pi_0(R_{\delta+3})$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0
C	0	-1	0	$\pi_0(R_{\delta+4})$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$			
CI	1	-1	1	$\pi_0(R_{\delta+5})$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$			

TY et al., PTEP (2020)

See also Kawabata et al., PRL (2019)

10-fold way classifications of exceptional points in correlated systems (@ $\omega=0$ )

$$\widehat{PT}\widehat{H}\widehat{PT}^{-1} = \widehat{H}$$

$$\begin{aligned} \widehat{PT} &= \widehat{U}_{PT}\mathcal{K}, \\ \widehat{U}_{PT}\widehat{c}_{i\alpha}^\dagger\widehat{U}_{PT}^\dagger &= \sum_{\beta} \widehat{c}_{-i\beta}^\dagger U_{PT,\beta\alpha} \end{aligned}$$

$$\widehat{CP}\widehat{H}\widehat{CP}^{-1} = \widehat{H}$$

$$\begin{aligned} \widehat{CP} &= \widehat{U}_{CP} \\ \widehat{U}_{CP}\widehat{c}_{i\alpha}^\dagger\widehat{U}_{CP}^\dagger &= \sum_{\beta} \widehat{c}_{-i\beta}^\dagger U_{CP,\beta\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) \\ = U_{PT}H_{\text{eff}}^\top(\omega + i\delta, \mathbf{k})U_{PT}^\dagger \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) \\ = -U_{CP}H_{\text{eff}}^*(-\omega + i\delta, \mathbf{k})U_{CP}^\dagger \end{aligned}$$

$\delta - 1$  dim. of the topo. invariant

Symmetry class	$PT$	$CP$	$\Gamma$	Homotopy	$\delta = 1$	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0	0	$\pi_0(C_\delta)$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
AIII	0	0	1	$\pi_0(C_{\delta+1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
AI	1	0	0	$\pi_0(R_{\delta+6})$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0
BDI	1	1	1	$\pi_0(R_{\delta+7})$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0
D	0	1	0	$\pi_0(R_\delta)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$
DIII	-1	1	1	$\pi_0(R_{\delta+1})$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$
AII	-1	0	0	$\pi_0(R_{\delta+2})$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
CII	-1	-1	1	$\pi_0(R_{\delta+3})$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0
C	0	-1	0	$\pi_0(R_{\delta+4})$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$			
CI	1	-1	1	$\pi_0(R_{\delta+5})$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$			

TY et al., PTEP (2020)

See also Kawabata et al., PRL (2019)

10-fold way classifications of exceptional points in correlated systems (@ $\omega=0$ )

$$\widehat{PT}\widehat{H}\widehat{PT}^{-1} = \widehat{H}$$

$$\begin{aligned} \widehat{PT} &= \widehat{U}_{PT}\mathcal{K}, \\ \widehat{U}_{PT}\widehat{c}_{i\alpha}^\dagger\widehat{U}_{PT}^\dagger &= \sum_{\beta} \widehat{c}_{-i\beta}^\dagger U_{PT,\beta\alpha} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) \\ = U_{PT}H_{\text{eff}}^\top(\omega + i\delta, \mathbf{k})U_{PT}^\dagger \end{aligned}$$

$$\widehat{CP}\widehat{H}\widehat{CP}^{-1} = \widehat{H}$$

$$\begin{aligned} \widehat{CP} &= \widehat{U}_{CP} \\ \widehat{U}_{CP}\widehat{c}_{i\alpha}\widehat{U}_{CP}^\dagger &= \sum_{\beta} \widehat{c}_{-i\beta}^\dagger U_{CP,\beta\alpha} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) \\ = -U_{CP}H_{\text{eff}}^*(-\omega + i\delta, \mathbf{k})U_{CP}^\dagger \end{aligned}$$

$$\widehat{\Gamma}\widehat{H}\widehat{\Gamma}^{-1} = \widehat{H}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma} &= \widehat{U}_{\Gamma}\mathcal{K}, \\ \widehat{U}_{\Gamma}\widehat{c}_{i\alpha}\widehat{U}_{\Gamma}^\dagger &= \sum_{\beta} \widehat{c}_{i\beta}^\dagger U_{\Gamma,\beta\alpha} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) : \\ = -U_{\Gamma}H_{\text{eff}}^\dagger(-\omega + i\delta, \mathbf{k})U_{\Gamma}^\dagger. \end{aligned}$$

$\delta - 1$  dim. of the topo. invariant

Symmetry class	$PT$	$CP$	$\Gamma$	Homotopy	$\delta = 1$	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0	0	$\pi_0(C_\delta)$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
AIII	0	0	1	$\pi_0(C_{\delta+1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
AI	1	0	0	$\pi_0(R_{\delta+6})$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0
BDI	1	1	1	$\pi_0(R_{\delta+7})$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0
D	0	1	0	$\pi_0(R_\delta)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$
DIII	-1	1	1	$\pi_0(R_{\delta+1})$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$
AII	-1	0	0	$\pi_0(R_{\delta+2})$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
CII	-1	-1	1	$\pi_0(R_{\delta+3})$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0
C	0	-1	0	$\pi_0(R_{\delta+4})$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$			
CI	1	-1	1	$\pi_0(R_{\delta+5})$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$			

TY et al., PTEP (2020)

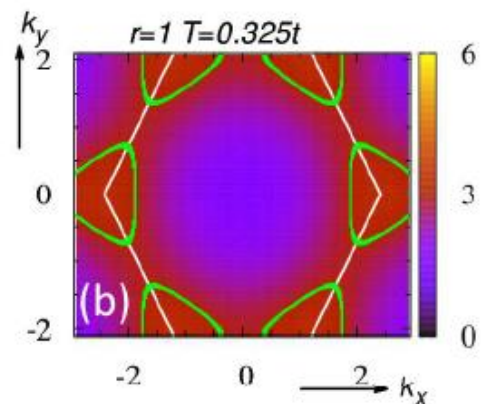
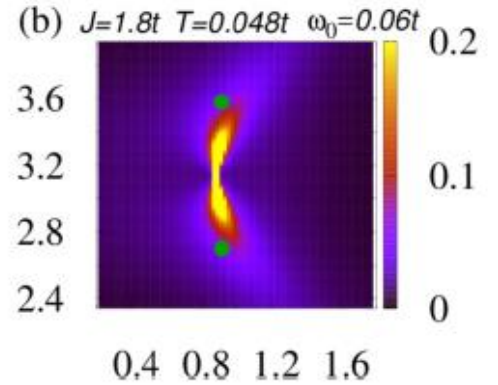
See also Kawabata et al., PRL (2019)



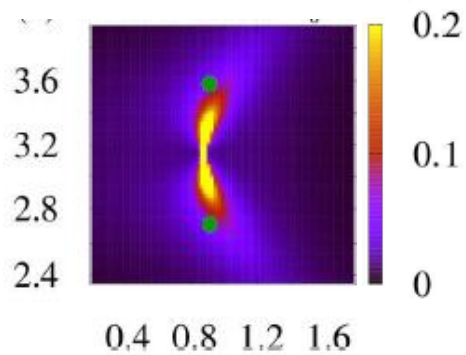
# 10-fold way classifications of exceptional points in correlated systems (@ $\omega=0$ )

$\delta - 1$  dim. of the topo. invariant

Symmetry class	$PT$	$CP$	$\Gamma$	Homotopy	$\delta = 1$	2	3					
A	0	0	0	$\pi_0(C_\delta)$	0	$\mathbb{Z}$	0					
AIII	0	0	1	$\pi_0(C_{\delta+1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0
AI	1	0	0	$\pi_0(R_{\delta+6})$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0
BDI	1	1	1	$\pi_0(R_{\delta+7})$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0
D	0	1	0	$\pi_0(R_\delta)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$
DIII	-1	1	1	$\pi_0(R_{\delta+1})$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$
AII	-1	0	0	$\pi_0(R_{\delta+2})$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
CII	-1	-1	1	$\pi_0(R_{\delta+3})$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0
C	0	-1	0	$\pi_0(R_{\delta+4})$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$
CI	1	-1	1	$\pi_0(R_{\delta+5})$							$\mathbb{Z}$	0



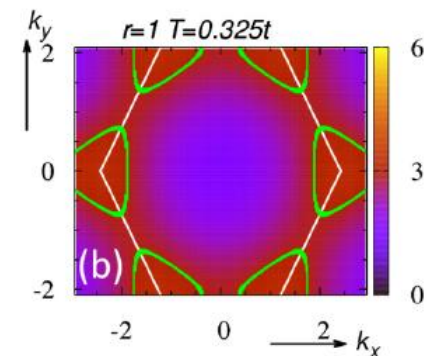
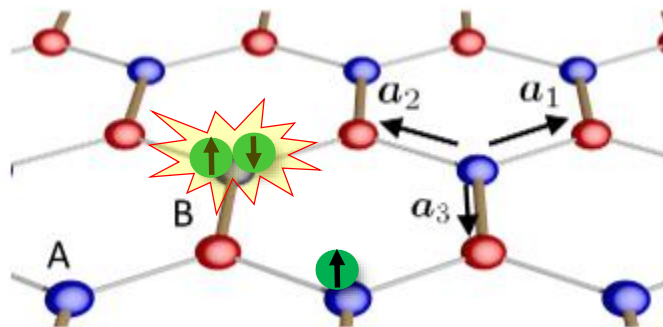
## 2日目まとめ



$$G^{-1}(\omega, \vec{k}) = (\omega - h(\vec{k}) - \Sigma(\omega, \vec{k}))$$

非エルミート行列

- ・平衡系の準粒子励起で例外点が見られる。
- ・多体のハミルトニアンの対称性が例外点を多様化



1日目の補足:

判別式を用いた例外点の特徴付けと対称性指標

## Warm up: 判別式とエネルギー縮退

定義

$$a_l \in \mathbb{C}$$

$$\text{For } f(x) = a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\text{Disc}[f(x)] = (-1)^{N(N-1)/2} \prod_{i \neq j} (r_i - r_j)$$

$$r_j : f(x) = 0$$

の解(根)

## Warm up: 判別式とエネルギー縮退

定義

For  $f(x) = a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0$

$a_l \in \mathbb{C}$

$$\text{Disc}[f(x)] = (-1)^{N(N-1)/2} \prod_{i \neq j} (r_i - r_j)$$

$r_j : f(x) = 0$   
の解(根)

判別式は多項式の係数からも計算できる。

e.g.) for  $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$\begin{aligned} \text{Disc}[f(x)] = & -4a_1^3 a_3 - 27a_0^2 a_3^2 + a_1^2 a_2^2 \\ & + 18a_0 a_1 a_2 a_3 - 4a_0 a_2^3 \end{aligned}$$

## Warm up: 判別式とエネルギー縮退

定義

For  $f(x) = a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0$

$$\text{Disc}[f(x)] = (-1)^{N(N-1)/2} \prod_{i \neq j} (r_i - r_j)$$

$a_l \in \mathbb{C}$

$r_j : f(x) = 0$   
の解(根)

判別式は多項式の係数からも計算できる。

e.g.) for  $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$\begin{aligned} \text{Disc}[f(x)] = & -4a_1^3 a_3 - 27a_0^2 a_3^2 + a_1^2 a_2^2 \\ & + 18a_0 a_1 a_2 a_3 - 4a_0 a_2^3 \end{aligned}$$

$\Delta(\mathbf{k}) \in \mathbb{C}$  : 以下の多項式の判別式

$$\det[H(\mathbf{k}) - E\mathbb{1}] = 0$$

# Warm up: 判別式とエネルギー縮退

定義

For  $f(x) = a_N x^N + \dots + a_1 x + a_0$   $a_l \in \mathbb{C}$

$$\text{Disc}[f(x)] = (-1)^{N(N-1)/2} \prod_{i \neq j} (r_i - r_j)$$

$r_j : f(x) = 0$   
の解(根)

判別式は多項式の係数からも計算できる。

e.g.) for  $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$\begin{aligned} \text{Disc}[f(x)] = & -4a_1^3 a_3 - 27a_0^2 a_3^2 + a_1^2 a_2^2 \\ & + 18a_0 a_1 a_2 a_3 - 4a_0 a_2^3 \end{aligned}$$

$\Delta(\mathbf{k}) \in \mathbb{C}$  : 以下の多項式の判別式

$$\det[H(\mathbf{k}) - E\mathbb{1}] = 0$$

$\Delta(\mathbf{k}) = 0$  だと二つのバンドがタッチする。  
(例外点の発現)

## Discriminant winding number

$\Delta(\mathbf{k}) \in \mathbb{C}$  : 以下の多項式の判別式

$$\det[H(\mathbf{k}) - E\mathbb{1}] = 0$$

$\nu$  : 判別式を用いたwinding数

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \oint d\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} \arg \Delta(\mathbf{k})$$

Yang-Schnyder-Hu-Chiu PRL (2021)

Delplace-TY-Hatsugai PRL (2021)



# Discriminant winding number

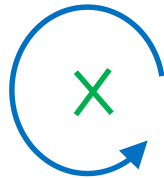
$\Delta(\mathbf{k}) \in \mathbb{C}$  : 以下の多項式の判別式

$$\det[H(\mathbf{k}) - E\mathbb{1}] = 0$$

$\nu$  : 判別式を用いたwinding数

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \oint d\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} \arg \Delta(\mathbf{k})$$

$\mathbf{k}$



If  $\nu = \pm 1$

積分経路で囲まれた領域内に  $\Delta(\mathbf{k}) = 0$   
となる点が摂動に対し安定に存在する。



例外点が発現する。

Yang-Schnyder-Hu-Chiu PRL (2021)

Delplace-TY-Hatsugai PRL (2021)

判別式を用いたトポロジカル不変量の対称性指標への応用

# 対称性指標(エルミート系)

Po-Vishwanath-Watanabe Nat. Comm.(2017)

対称性指標

\*トポロジカル不変量が非自明であることの十分条件を与えてくれる。

\*ブリルアンゾーン内の積分をせずに、非自明な構造を検出できる。  
(検出できるトポロジカルな構造は限られる)

# 対称性指標(エルミート系)

Po-Vishwanath-Watanabe Nat. Comm.(2017)

対称性指標

\*トポロジカル不変量が非自明であることの十分条件を与えてくれる。

\*ブリルアンゾーン内の積分をせずに、非自明な構造を検出できる。  
(検出できるトポロジカルな構造は限られる)

例)

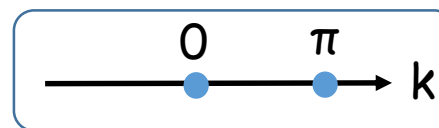
一次元トポロジカル絶縁体(カイラル対称かつ空間反転対称)

$$H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & z(k) \\ z^*(k) & 0 \end{pmatrix}$$

$$z(k) = z^*(-k)$$

Topo.#:

$$W = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \partial_k \arg[z(k)]$$



$$W \neq 0 \text{ if } \text{sgn}[z(0)z(\pi)] = -1$$

対称性指標

# 対称性指標(エルミート系)

Po-Vishwanath-Watanabe Nat. Comm.(2017)

## 対称性指標

\*トポロジカル不変量が非自明であることの十分条件を与えてくれる。

\*ブリルアンゾーン内の積分をせずに、非自明な構造を検出できる。  
(検出できるトポロジカルな構造は限られる)

例)

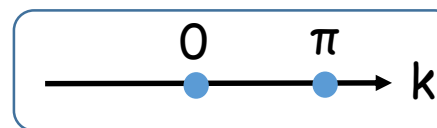
一次元トポロジカル絶縁体(カイラル対称かつ空間反転対称)

$$H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & z(k) \\ z^*(k) & 0 \end{pmatrix}$$

$$z(k) = z^*(-k)$$

Topo.#:

$$W = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \partial_k \arg[z(k)]$$



$$W \neq 0 \text{ if } \text{sgn}[z(0)z(\pi)] = -1$$

対称性指標

対称性指標が1でもW=2,4などの偶数値はとれる。

# 研究のモチベーション

非エルミート系への対称性指標の拡張

- Okugawa et al., PRB (2021)
- Shiozaki-Ono, PRB (2021)
- Shindler et al., PRB (2021)

doubled Hermitian Hamiltonianの対称性指標

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & H - E_{\text{ref}} \mathbb{1} \\ H^\dagger - E_{\text{ref}}^* \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

# 研究のモチベーション

非エルミート系への対称性指標の拡張

- ・Okugawa et al., PRB (2021)
- ・Shiozaki-Ono, PRB (2021)
- ・Shindler et al., PRB (2021)

doubled Hermitian Hamiltonianの対称性指標

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & H - E_{\text{ref}} \mathbb{1} \\ H^\dagger - E_{\text{ref}}^* \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

しかし...

$E_{\text{ref}}$  は例外点がどのエネルギーに出るか知っていないと計算できない。

Q

$E_{\text{ref}}$  に依存しない対称性指標で系統的に例外点を検出できないか？

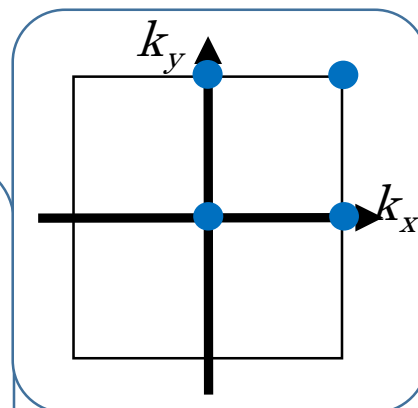
# 結果の概略

判別式を用いた対称性指標だと、  
 $E_{\text{ref}}$ に寄らず系統的な例外点の検出が可能

例外点 in 2D (空間反転対称性)

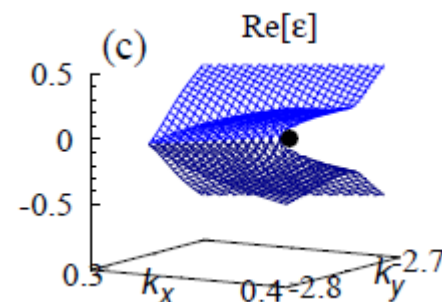
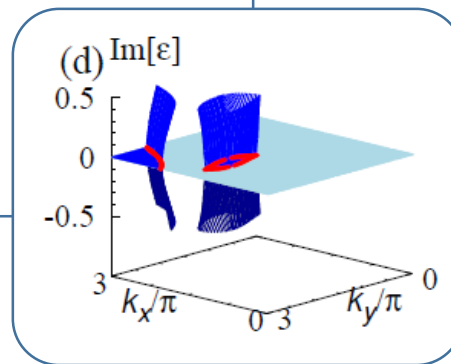
$$\zeta_{\text{I,2D}} := \prod_{\Gamma_j \in \text{TRIM}} \text{sgn} \Delta(\Gamma_j)$$

$$\text{TRIM} = \{(0, 0), (\pi, 0), (0, \pi), (\pi, \pi)\}$$



対称性に保護された例外円 in 2D (空間反転+ 時間反転)

$$\zeta_{\text{TI}} = \prod_{\Gamma_j \in \text{TRIM}} \text{sgn} \Delta(\Gamma_j)$$





## 対称性指標(一般化された空間反転対称性)

ハミルトニアンは一般化された空間反転対称性を満たすとする。

$$U_{\mathbf{I}} H(\mathbf{k}) U_{\mathbf{I}}^{\dagger} = H^{\dagger}(-\mathbf{k})$$

U: unitary matrix

すると。。。 —————

$$\Delta(\mathbf{k}) = \Delta^*(-\mathbf{k})$$

## 対称性指標(一般化された空間反転対称性)

ハミルトニアンは一般化された空間反転対称性を満たすとする。

$$U_I H(\mathbf{k}) U_I^\dagger = H^\dagger(-\mathbf{k})$$

U: unitary matrix

すると。。

$$\Delta(\mathbf{k}) = \Delta^*(-\mathbf{k})$$

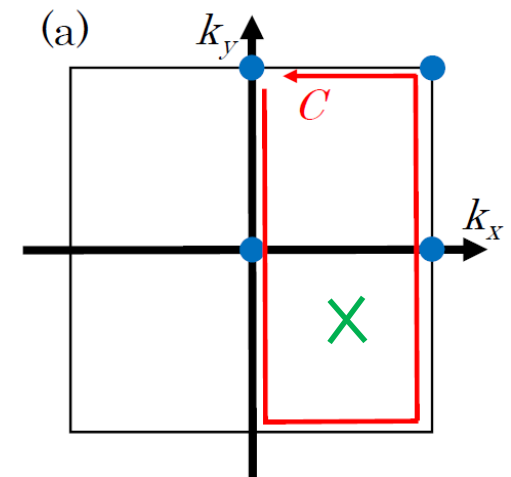
以上より、

$$(-1)^\nu = \zeta_{I,2D} := \prod_{\Gamma_j \in \text{TRIM}} \text{sgn} \Delta(\Gamma_j)$$

特に、 $\zeta_{I,2D} = -1$  だと、 $\nu$  は奇。



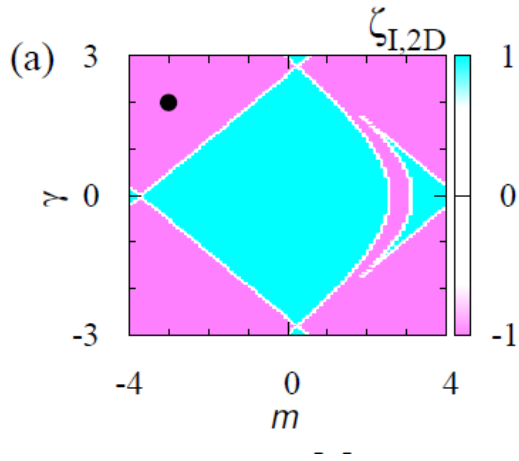
奇数個の例外点  
赤の積分経路内に出現。



証明は2ページ後

# 数値計算によるデモンストレーション

## 対称性指標のカラーマップ

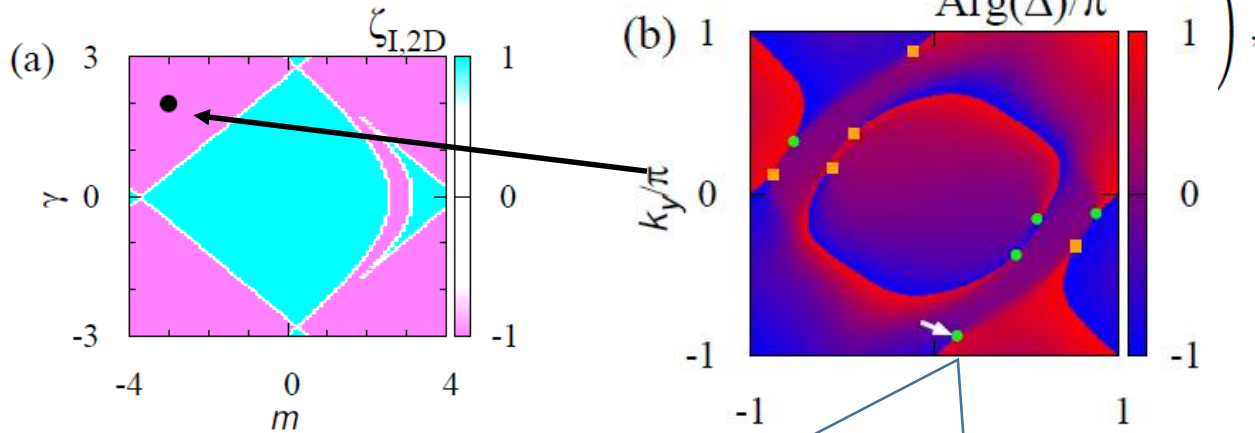


$$H(\mathbf{k}) = \xi(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (i\gamma + \sin k_x) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ + (i\gamma + \sin k_y) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \xi'(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & i \\ -\frac{1}{2} & i & 0 \end{pmatrix} \\ + \xi''(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\xi(\mathbf{k}) = -2t(\cos k_x + \cos k_y) - m$$

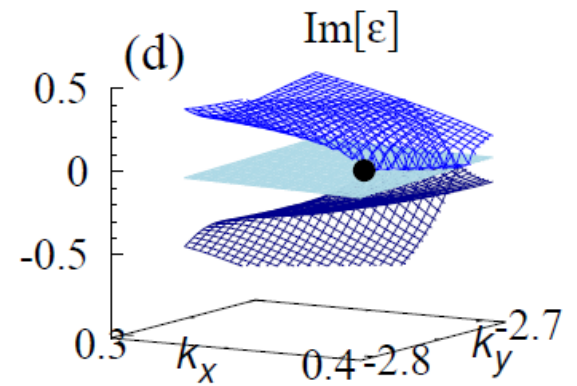
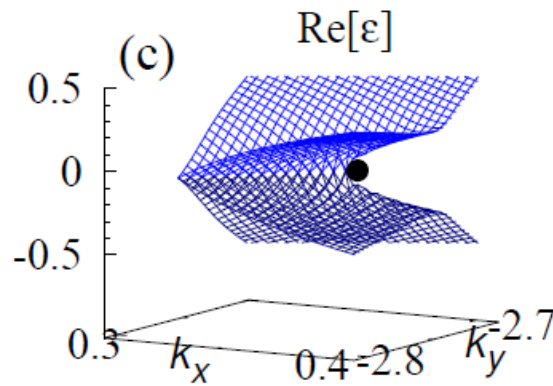
# 数値計算によるデモンストレーション

$$H(\mathbf{k}) = \xi(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (i\gamma + \sin k_x) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ + (i\gamma + \sin k_y) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \xi'(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & i \\ -\frac{1}{2} & i & 0 \end{pmatrix}$$

## 対称性指標のカラーマップ



$$\xi(\mathbf{k}) = -2t(\cos k_x + \cos k_y) - m$$



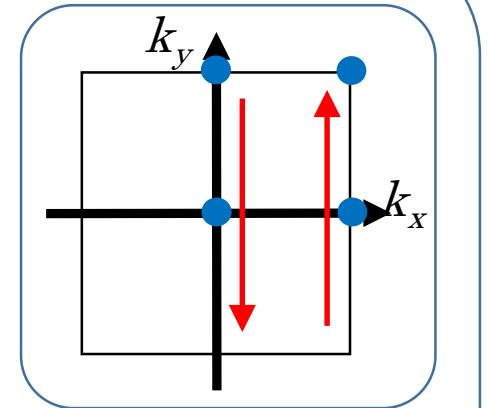
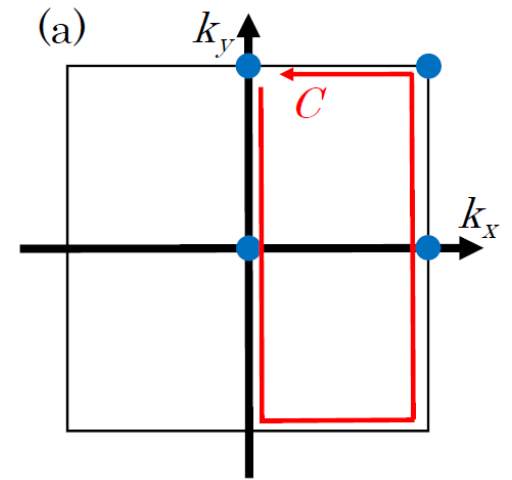
## 対称性指標の導出

$$(-1)^\nu = \zeta_{\text{I,2D}} := \prod_{\Gamma_j \in \text{TRIM}} \text{sgn} \Delta(\Gamma_j)$$

∴)

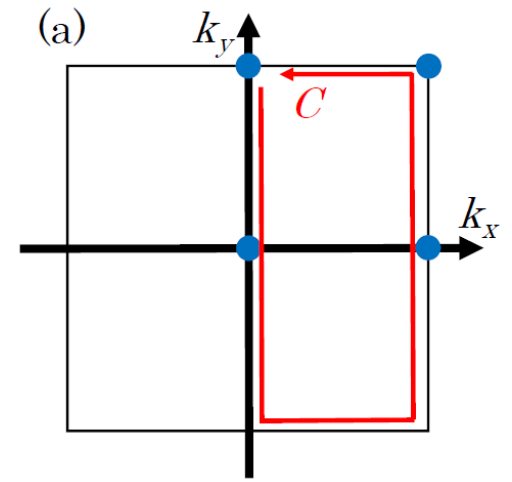
$$\nu = \nu_\pi - \nu_0$$

$$\nu_{k_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_y \partial_{k_y} \arg \Delta(k_0, k_y)$$
$$k_0 = 0, \pi$$



# 対称性指標の導出

$$(-1)^\nu = \zeta_{\text{I,2D}} := \prod_{\Gamma_j \in \text{TRIM}} \text{sgn} \Delta(\Gamma_j)$$

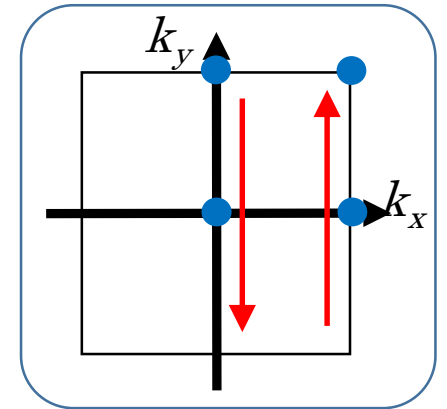


∴)

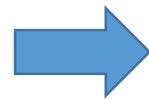
$$\nu = \nu_\pi - \nu_0$$

$$\nu_{k_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk_y \partial_{k_y} \arg \Delta(k_0, k_y)$$

$$k_0 = 0, \pi$$



$$(-1)^{\nu_{k_0}} = \text{sgn}[\Delta(k_0, \pi)] \text{sgn}[\Delta(k_0, 0)]$$

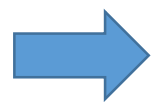


$$(-1)^{\nu_\pi - \nu_0} = \prod_{\Gamma_j \in \text{TRIM}} \text{sgn} \Delta(\Gamma_j)$$

$$(-1)^{\nu_{k_0}} = \text{sgn}[\Delta(k_0, \pi)] \text{sgn}[\Delta(k_0, 0)]$$

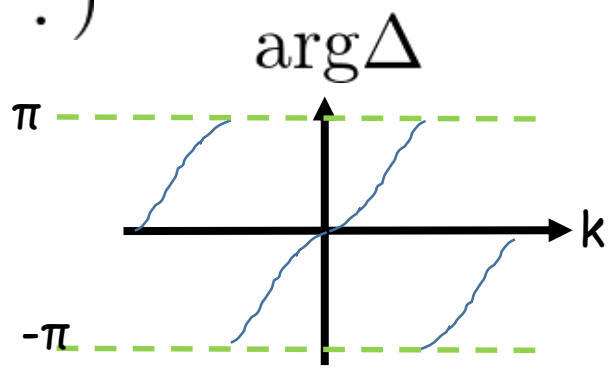
$$\rightarrow (-1)^{\nu_{\pi} - \nu_0} = \prod_{\Gamma_j \in \text{TRIM}} \text{sgn} \Delta(\Gamma_j)$$

$$(-1)^{\nu_{k_0}} = \text{sgn}[\Delta(k_0, \pi)] \text{sgn}[\Delta(k_0, 0)]$$



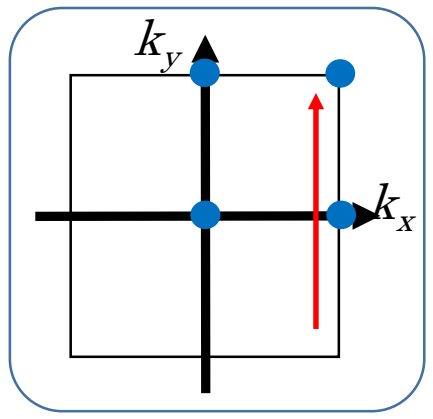
$$(-1)^{\nu_\pi - \nu_0} = \prod_{\Gamma_j \in \text{TRIM}} \text{sgn} \Delta(\Gamma_j)$$

∴)



空間反転対称性

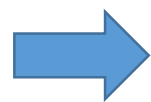
$$\Delta(\mathbf{k}) = \Delta^*(-\mathbf{k})$$



$$2\pi\nu = \int_{-\pi}^{\pi} dk_y \partial_{k_y} \arg \Delta(k_y)$$

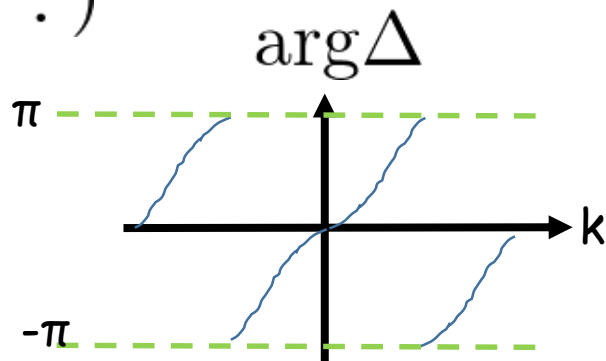


$$(-1)^{\nu_{k_0}} = \text{sgn}[\Delta(k_0, \pi)] \text{sgn}[\Delta(k_0, 0)]$$



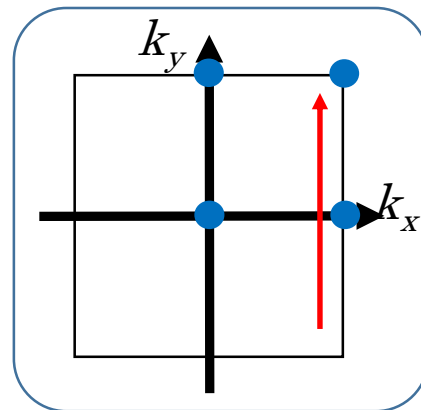
$$(-1)^{\nu_\pi - \nu_0} = \prod_{\Gamma_j \in \text{TRIM}} \text{sgn} \Delta(\Gamma_j)$$

∴



空間反転対称性

$$\Delta(\mathbf{k}) = \Delta^*(-\mathbf{k})$$

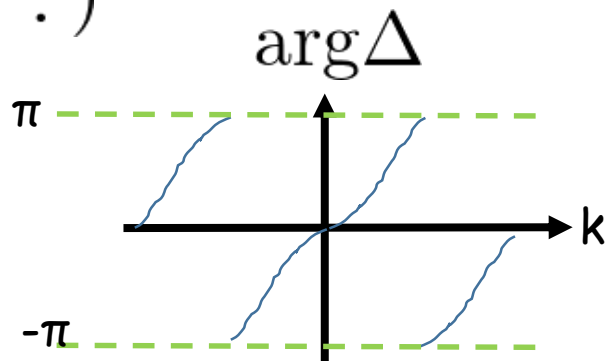


$$\begin{aligned} 2\pi\nu &= \int_{-\pi}^{\pi} dk_y \partial_{k_y} \arg \Delta(k_y) \\ &= 2 \int_0^{\pi} dk_y \partial_{k_y} \arg \Delta(k_y) \end{aligned}$$

$$(-1)^{\nu_{k_0}} = \text{sgn}[\Delta(k_0, \pi)] \text{sgn}[\Delta(k_0, 0)]$$

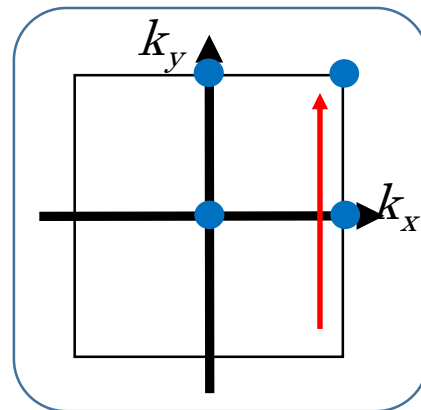
$$\Rightarrow (-1)^{\nu_\pi - \nu_0} = \prod_{\Gamma_j \in \text{TRIM}} \text{sgn} \Delta(\Gamma_j)$$

∴



空間反転対称性

$$\Delta(\mathbf{k}) = \Delta^*(-\mathbf{k})$$



$$2\pi\nu = \int_{-\pi}^{\pi} dk_y \partial_{k_y} \arg \Delta(k_y)$$

$$= 2 \int_0^{\pi} dk_y \partial_{k_y} \arg \Delta(k_y)$$

$$= 2[\arg \Delta(\pi) - \arg \Delta(0) + 2\pi N] \quad N \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow e^{i\pi\nu_\pi} = e^{i\arg \Delta(\pi)} e^{i\arg \Delta(0)}$$

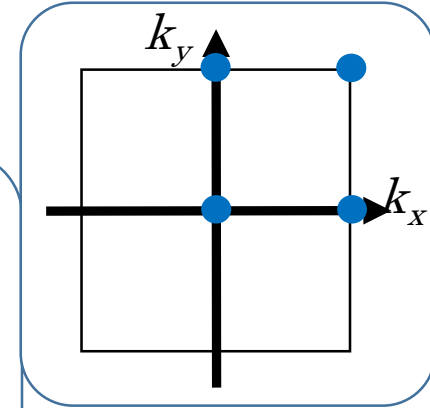
# 補足のまとめ

判別式による対称性指標により、  
 $E_{ref}$ の曖昧さ無しに例外点を検出できる。

例外点 in 2D (空間反転)

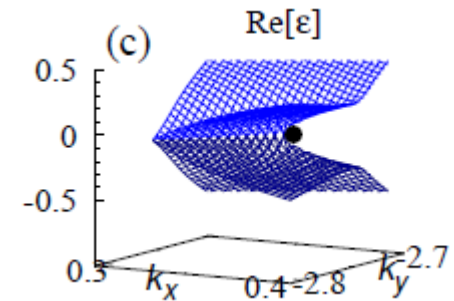
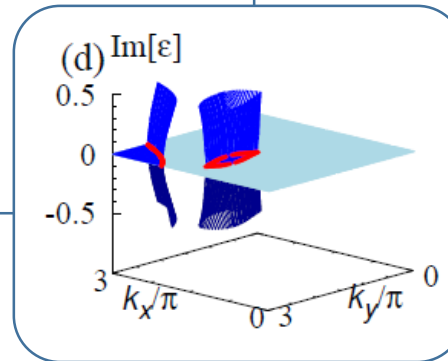
$$\zeta_{I,2D} := \prod_{\Gamma_j \in \text{TRIM}} \text{sgn} \Delta(\Gamma_j)$$

$$\text{TRIM} = \{(0, 0), (\pi, 0), (0, \pi), (\pi, \pi)\}$$



対称性に保護された例外円 in 2D (空間反転+時間反転)

$$\zeta_{\text{TI}} = \prod_{\Gamma_j \in \text{TRIM}} \text{sgn} \Delta(\Gamma_j)$$



# 付録

## 多体ハミルトニアンでのPT対称性とグリーン関数

$$\widehat{PT}\widehat{H}\widehat{PT}^{-1} = \widehat{H}$$

$$\begin{aligned}\widehat{PT} &= \widehat{U}_{PT}\mathcal{K}, \\ \widehat{U}_{PT}\widehat{c}_{i\alpha}^\dagger\widehat{U}_{PT}^\dagger &= \sum_{\beta} \widehat{c}_{-i\beta}^\dagger U_{PT,\beta\alpha}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}H_{\text{eff}}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) \\ = U_{PT}H_{\text{eff}}^T(\omega + i\delta, \mathbf{k})U_{PT}^\dagger\end{aligned}$$

## 多体ハミルトニアンの特称性とグリーン関数

$$\widehat{PT}\widehat{H}\widehat{PT}^{-1} = \widehat{H}$$

$$\begin{aligned} \widehat{PT} &= \widehat{U}_{PT}\mathcal{K}, \\ \widehat{U}_{PT}\hat{c}_{i\alpha}^\dagger\widehat{U}_{PT}^\dagger &= \sum_{\beta} \hat{c}_{-i\beta}^\dagger U_{PT,\beta\alpha} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) \\ = U_{PT}H_{\text{eff}}^T(\omega + i\delta, \mathbf{k})U_{PT}^\dagger \end{aligned}$$

$$G^{-1}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) = (\omega + i\delta)\mathbb{1} - H_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k})$$

$$H_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k}) = h(\mathbf{k}) + \Sigma(\omega + i\delta, \mathbf{k})$$

$$\therefore G_{\alpha\gamma}^R(t, \vec{k}) = -i\langle \hat{c}_{\vec{k}\alpha}(t)\hat{c}_{\vec{k}\gamma}^\dagger + \hat{c}_{\vec{k}\gamma}^\dagger \hat{c}_{\vec{k}\alpha}(t) \rangle \theta(t)$$

$$\langle \hat{c}_{i\alpha}(t)\hat{c}_{j\gamma}^\dagger \rangle = Z^{-1}\text{tr}[e^{-\beta\widehat{H}}e^{it\widehat{H}}\hat{c}_{i\alpha}e^{-it\widehat{H}}\hat{c}_{j\gamma}^\dagger]$$

# 多体ハミルトニアンの特称性とグリーン関数

$$G^{-1}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) = (\omega + i\delta)\mathbb{1} - H_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k})$$

$$H_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k}) = h(\mathbf{k}) + \Sigma(\omega + i\delta, \mathbf{k})$$

$$\widehat{PT}\widehat{H}\widehat{PT}^{-1} = \widehat{H}$$

$$\begin{aligned} \widehat{PT} &= \widehat{U}_{PT}\mathcal{K}, \\ \widehat{U}_{PT}\widehat{c}_{i\alpha}^\dagger\widehat{U}_{PT}^\dagger &= \sum_{\beta} \widehat{c}_{-i\beta}^\dagger U_{PT,\beta\alpha} \end{aligned}$$



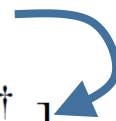
$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) \\ = U_{PT}H_{\text{eff}}^T(\omega + i\delta, \mathbf{k})U_{PT}^\dagger \end{aligned}$$

$$\therefore G_{\alpha\gamma}^R(t, \vec{k}) = -i\langle \widehat{c}_{\vec{k}\alpha}(t)\widehat{c}_{\vec{k}\gamma}^\dagger + \widehat{c}_{\vec{k}\gamma}^\dagger \widehat{c}_{\vec{k}\alpha}(t) \rangle \theta(t)$$

$$\langle \widehat{c}_{i\alpha}(t)\widehat{c}_{j\gamma}^\dagger \rangle = Z^{-1}\text{tr}[e^{-\beta\widehat{H}}e^{it\widehat{H}}\widehat{c}_{i\alpha}e^{-it\widehat{H}}\widehat{c}_{j\gamma}^\dagger]$$

$$= Z^{-1}\text{tr}[e^{-\beta\widehat{U}_{CP}\widehat{H}\widehat{U}_{CP}^\dagger}e^{it\widehat{U}_{CP}\widehat{H}\widehat{U}_{CP}^\dagger}\widehat{c}_{i\alpha}e^{-it\widehat{U}_{CP}\widehat{H}\widehat{U}_{CP}^\dagger}\widehat{c}_{j\gamma}^\dagger]$$

$$it\widehat{H} = it\widehat{U}_{PT}\widehat{H}^*\widehat{U}_{PT}^\dagger$$



# 多体ハミルトニアンの特称性とグリーン関数

$$G^{-1}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) = (\omega + i\delta)\mathbb{1} - H_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k})$$

$$H_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k}) = h(\mathbf{k}) + \Sigma(\omega + i\delta, \mathbf{k})$$

$$\widehat{PT}\widehat{H}\widehat{PT}^{-1} = \widehat{H}$$

$$\widehat{PT} = \widehat{U}_{PT}\mathcal{K},$$

$$\widehat{U}_{PT}\widehat{c}_{i\alpha}^\dagger\widehat{U}_{PT}^\dagger = \sum_{\beta} \widehat{c}_{-i\beta}^\dagger U_{PT,\beta\alpha}$$



$$H_{\text{eff}}(\omega + i\delta, \mathbf{k})$$

$$= U_{PT}H_{\text{eff}}^T(\omega + i\delta, \mathbf{k})U_{PT}^\dagger$$

$$\therefore G_{\alpha\gamma}^R(t, \vec{k}) = -i\langle \widehat{c}_{\vec{k}\alpha}(t)\widehat{c}_{\vec{k}\gamma}^\dagger + \widehat{c}_{\vec{k}\gamma}^\dagger \widehat{c}_{\vec{k}\alpha}(t) \rangle \theta(t)$$

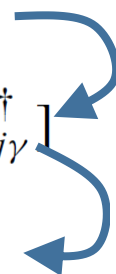
$$\langle \widehat{c}_{i\alpha}(t)\widehat{c}_{j\gamma}^\dagger \rangle = Z^{-1}\text{tr}[e^{-\beta\widehat{H}}e^{it\widehat{H}}\widehat{c}_{i\alpha}e^{-it\widehat{H}}\widehat{c}_{j\gamma}^\dagger]$$

$$= Z^{-1}\text{tr}[e^{-\beta\widehat{U}_{CP}\widehat{H}\widehat{U}_{CP}^\dagger}e^{it\widehat{U}_{CP}\widehat{H}\widehat{U}_{CP}^\dagger}\widehat{c}_{i\alpha}e^{-it\widehat{U}_{CP}\widehat{H}\widehat{U}_{CP}^\dagger}\widehat{c}_{j\gamma}^\dagger]$$

$$= Z^{-1}\text{tr}[e^{-\beta\widehat{H}}e^{it\widehat{H}}\widehat{U}_{CP}^\dagger\widehat{c}_{i\alpha}\widehat{U}_{CP}e^{-it\widehat{H}}\widehat{U}_{CP}^\dagger\widehat{c}_{j\gamma}^\dagger\widehat{U}_{CP}]$$

$$it\widehat{H} = it\widehat{U}_{PT}\widehat{H}^*\widehat{U}_{PT}^\dagger$$

$$\widehat{U}_{PT}^\dagger\widehat{c}_{i\alpha}^\dagger\widehat{U}_{PT} = \sum_{\alpha'} \widehat{c}_{-i\alpha'}^\dagger U_{\alpha'\alpha}^\dagger$$





# 多体ハミルトニアンの特称性とグリーン関数

$$\widehat{PT}\widehat{H}\widehat{PT}^{-1} = \widehat{H}$$

$$\widehat{PT} = \widehat{U}_{PT}\mathcal{K},$$

$$\widehat{U}_{PT}\widehat{c}_{i\alpha}^\dagger\widehat{U}_{PT}^\dagger = \sum_{\beta} \widehat{c}_{-i\beta}^\dagger U_{PT,\beta\alpha}$$



$$H_{\text{eff}}(\omega + i\delta, \mathbf{k})$$

$$= U_{PT}H_{\text{eff}}^T(\omega + i\delta, \mathbf{k})U_{PT}^\dagger$$

$$G^{-1}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) = (\omega + i\delta)\mathbb{1} - H_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k})$$

$$H_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k}) = h(\mathbf{k}) + \Sigma(\omega + i\delta, \mathbf{k})$$

$$\therefore G_{\alpha\gamma}^R(t, \vec{k}) = -i\langle \widehat{c}_{\vec{k}\alpha}(t)\widehat{c}_{\vec{k}\gamma}^\dagger + \widehat{c}_{\vec{k}\gamma}^\dagger \widehat{c}_{\vec{k}\alpha}(t) \rangle \theta(t)$$

$$\langle \widehat{c}_{i\alpha}(t)\widehat{c}_{j\gamma}^\dagger \rangle = Z^{-1}\text{tr}[e^{-\beta\widehat{H}}e^{it\widehat{H}}\widehat{c}_{i\alpha}e^{-it\widehat{H}}\widehat{c}_{j\gamma}^\dagger]$$

$$= Z^{-1}\text{tr}[e^{-\beta\widehat{U}_{CP}\widehat{H}\widehat{U}_{CP}^\dagger}e^{it\widehat{U}_{CP}\widehat{H}\widehat{U}_{CP}^\dagger}\widehat{c}_{i\alpha}e^{-it\widehat{U}_{CP}\widehat{H}\widehat{U}_{CP}^\dagger}\widehat{c}_{j\gamma}^\dagger]$$

$$= Z^{-1}\text{tr}[e^{-\beta\widehat{H}}e^{it\widehat{H}}\widehat{U}_{CP}^\dagger\widehat{c}_{i\alpha}\widehat{U}_{CP}e^{-it\widehat{H}}\widehat{U}_{CP}^\dagger\widehat{c}_{j\gamma}^\dagger\widehat{U}_{CP}]$$

$$= Z^{-1}\sum_{\alpha'\gamma'}\text{tr}[e^{-\beta\widehat{H}}e^{it\widehat{H}}U_{CP,\alpha\alpha'}\widehat{c}_{-i\alpha'}^\dagger e^{-it\widehat{H}}\widehat{c}_{-j\gamma'}U_{CP,\gamma'\gamma}^\dagger]$$

$$it\widehat{H} = it\widehat{U}_{PT}\widehat{H}^*\widehat{U}_{PT}^\dagger$$

$$\widehat{U}_{PT}^\dagger\widehat{c}_{i\alpha}^\dagger\widehat{U}_{PT} = \sum_{\alpha'} \widehat{c}_{-i\alpha'}^\dagger U_{\alpha'\alpha}^\dagger$$

$$\langle n^*|\widehat{A}|m^* \rangle = \langle m|\widehat{A}^T|n \rangle,$$

$$|n^* \rangle := \sum_{\{i\alpha\}} |\{i\alpha\} \rangle \langle n|\{i\alpha\} \rangle$$

# 多体ハミルトニアンの特称性とグリーン関数

$$\widehat{PT}\widehat{H}\widehat{PT}^{-1} = \widehat{H}$$

$$\begin{aligned} \widehat{PT} &= \widehat{U}_{PT}\mathcal{K}, \\ \widehat{U}_{PT}\widehat{c}_{i\alpha}^\dagger\widehat{U}_{PT}^\dagger &= \sum_{\beta} \widehat{c}_{-i\beta}^\dagger U_{PT,\beta\alpha} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) \\ = U_{PT}H_{\text{eff}}^T(\omega + i\delta, \mathbf{k})U_{PT}^\dagger \end{aligned}$$

$$G^{-1}(\omega + i\delta, \mathbf{k}) = (\omega + i\delta)\mathbb{1} - H_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k})$$

$$H_{\text{eff}}(\omega, \mathbf{k}) = h(\mathbf{k}) + \Sigma(\omega + i\delta, \mathbf{k})$$

$$\therefore G_{\alpha\gamma}^R(t, \vec{k}) = -i\langle \widehat{c}_{\vec{k}\alpha}(t)\widehat{c}_{\vec{k}\gamma}^\dagger + \widehat{c}_{\vec{k}\gamma}^\dagger \widehat{c}_{\vec{k}\alpha}(t) \rangle \theta(t)$$

$$\langle \widehat{c}_{i\alpha}(t)\widehat{c}_{j\gamma}^\dagger \rangle = Z^{-1}\text{tr}[e^{-\beta\widehat{H}}e^{it\widehat{H}}\widehat{c}_{i\alpha}e^{-it\widehat{H}}\widehat{c}_{j\gamma}^\dagger]$$

$$= Z^{-1}\text{tr}[e^{-\beta\widehat{U}_{CP}\widehat{H}\widehat{U}_{CP}^\dagger}e^{it\widehat{U}_{CP}\widehat{H}\widehat{U}_{CP}^\dagger}\widehat{c}_{i\alpha}e^{-it\widehat{U}_{CP}\widehat{H}\widehat{U}_{CP}^\dagger}\widehat{c}_{j\gamma}^\dagger]$$

$$= Z^{-1}\text{tr}[e^{-\beta\widehat{H}}e^{it\widehat{H}}\widehat{U}_{CP}^\dagger\widehat{c}_{i\alpha}\widehat{U}_{CP}e^{-it\widehat{H}}\widehat{U}_{CP}^\dagger\widehat{c}_{j\gamma}^\dagger\widehat{U}_{CP}]$$

$$= Z^{-1}\sum_{\alpha'\gamma'}\text{tr}[e^{-\beta\widehat{H}}e^{it\widehat{H}}U_{CP,\alpha\alpha'}\widehat{c}_{-i\alpha'}^\dagger e^{-it\widehat{H}}\widehat{c}_{-j\gamma'}U_{CP,\gamma'\gamma}^\dagger]$$

$$= \sum_{\alpha'\gamma'} U_{CP,\alpha\alpha'}U_{CP,\gamma'\gamma}^\dagger \langle \widehat{c}_{-i\alpha'}^\dagger(t)\widehat{c}_{-j\gamma'} \rangle,$$

$$it\widehat{H} = it\widehat{U}_{PT}\widehat{H}^*\widehat{U}_{PT}^\dagger$$

$$\widehat{U}_{PT}^\dagger\widehat{c}_{i\alpha}^\dagger\widehat{U}_{PT} = \sum_{\alpha'} \widehat{c}_{-i\alpha'}^\dagger U_{\alpha'\alpha}^\dagger$$

$$\langle n^*|\widehat{A}|m^* \rangle = \langle m|\widehat{A}^T|n \rangle,$$

$$|n^* \rangle := \sum_{\{i\alpha\}} |\{i\alpha\} \rangle \langle n|\{i\alpha\} \rangle$$

$$G(\omega + i\delta, \vec{k}) = U_{PT}G^T(\omega + i\delta, \vec{k})U_{PT}^\dagger$$