フェルミオンの物理と族の指数定理

東北大学 米倉和也

フェルミオンの物理

電子、クォーク（原子核の中身）

物性物理

いろんな物質

量子ホール効果

トポロジカル絶縁体

など

ストリング理論

最終理論？

ほとんど至る所

おんなじ数学が使える！

ディラック作用素

指数定理

この講義

$\boxed{\text{(d+1)次元と d 次元のフェルミオンの関係と、その幾何学}}$

注意

- いいかげん & 抽象的 (すみません)
- 時間ない (⇒ 講義ノート)
- Atiyah-(Patodi)-Singer 指数定理 知ってることになってる (最後の方)

§1 Basic setup

対称性

例

- 時空のローレンツ対称性
  (表現：スカラー, ベクトル, テンソル, スピノル, ⋯)

- ゲージ理論の構造群 G
  (電磁気 ⇒ $G = U(1)$ など)

(かなり)一般の対称性とは次の性質をもつ コンパクトリー群(のあつまり)

$H_d \qquad (d \in \mathbb{N})$

時空の次元

◦ $\exists \rho : H_d \to \underbrace{O(d)}_{\text{直交群}}$ （ローレンツ対称性のEuclid計量）

◦ $\mathrm{Im}\,\rho \supset \underbrace{SO(d)}_{O(d)\text{の内で}\det=+1}$

◦ $\exists$ inclusion $H_d \to H_{d+1}$ s.t

$$\begin{tikzcd} H_d \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & H_{d+1} \arrow[d, "\rho"] \\ O(d) \arrow[r] & O(d+1) \end{tikzcd}$$

これがpullback：

$H_d \subset H_{d+1}$ は $O(d) \subset O(d+1)$ の ρ^{-1} での逆像

なんの目的かはあとで

H 構造

d 次元リーマン多様体 X の H 構造とは

- H_d 主ファイバーバンドル $P \to X$
- リーマン多様体の tangent bundle

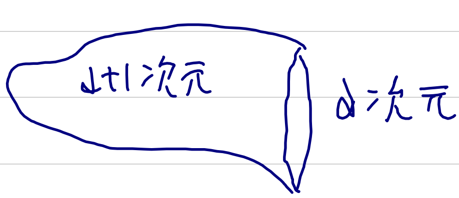
  TX （構造群 $O(d)$）が

  $TX \cong P \times_\rho \mathbb{R}^d$

  (recall $\rho : H_d \to O(d)$)

Pullback diagram
$$\begin{tikzcd} H_d \arrow[r] \arrow[d] & H_{d+1} \arrow[d] \\ O(d) \arrow[r] & O(d+1) \end{tikzcd}$$
は

H 構造をもった多様体の境界に自然に H 構造が入るようにするため。



例

H_d	多様体の H 構造
$SO(d)$	向きづけ
$O(d)$	向きづけなし (e.g. クラインのつぼ)
SO(d)の universal cover $\longrightarrow$ $Spin(d)$	スピン構造
$Spin(d) \times G$	G: 内部対称性 $\rho(G)=1$
O(d)の universal cover $\longrightarrow$ $Pin^{\pm}(d)$	向きづけなしスピン

もっと複雑なものも物理で重用

e.g. $H_d = \dfrac{Pin^{+}(d) \ltimes U(1)}{\mathbb{Z}_2}$

$\mathbb{Z}_2$ generated by $(-1,-1) \subset Pin^{+}(d) \times U(1)$

Clifford module

線形空間 S で次をみたすものを考える；

- $v \in \mathbb{R}^d$ が作用する

$$\mathbb{R}^d \ni v \longmapsto \hat{v} \in \mathrm{End}(S)$$

条件

単位行列

$$\hat{v} \cdot \hat{v} = v^2 \cdot 1$$

v の $\mathbb{R}^d$ での長さ

基底 $e_a = (0, \cdots, 0, \overset{a}{1}, 0, \cdots 0)$

をつかって $\gamma_a = \hat{e}_a$ とおくと、

クロネッカーデルタ

$$\hat{v} \cdot \hat{v} = v^2 \cdot 1 \iff \underbrace{\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\delta_{ab}}_{\text{Clifford 代数}}$$

γ_a ：ガンマ行列と呼ぶ

・さらに S は H_d のユニタリ表現 r

$$H_d \ni h \to r(h) \in \mathrm{End}(S)$$

次をみたすと要求

$$r(h)\,\hat{v}\,r(h)^{-1} = \widehat{\rho(h)v}$$ (何のためかはすぐ)

Clifford module bundle

$$SX = P \times_r S$$

P: H_d バンドル

(Recall $TX = P \times_e \mathbb{R}^d$)

$p \in X$ でのファイバー S_pX には

T_pX の元が作用

Dirac 作用素

H_d バンドル P に接続を入れる。

ただし, $P \times_{H_d} \to O(d)$ で Levi-Civita に

なるようなもの。

H 構造とその上の接続をもった

多様体を H 多様体と呼ぶことに

する。

$(e_a) = (e_1, \cdots, e_d)$: basis of $T_x = P_x \underset{\rho}{\times} \mathbb{R}^d$

D_a : e_a方向の共変ビブン

Dirac作用素 $i\not{D}$

$\not{D} = \sum_a \gamma_a D_a$

以下和の記号は省略

Xが closed のとき $i\not{D}$ は self-adjoint

実の固有値をもつ

コンパクトで境界なし

あとで重要

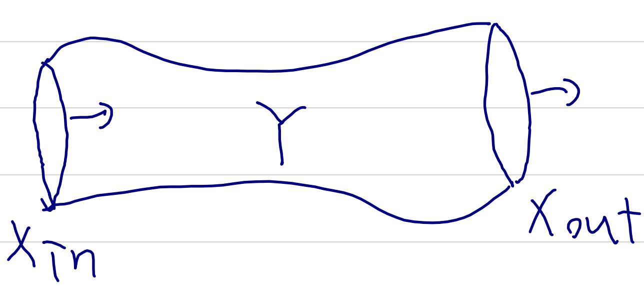
§2 フェルミオンの理論

<u>公理系(の一部)</u>

(アノマリーのない) H対称性をもった $(d+1)$ 次元 場の理論とは:

- $\dim X = d$ H多様体 X
  $\longrightarrow$ ヒルベルト空間 $\mathcal{H}(X)$
  もし $X = \phi$ なら $\mathcal{H}(\phi) = \mathbb{C}$

- $\dim Y = d+1$ H-多様体 Y
  境界 $\partial Y = X_{in} \sqcup X_{out}$



$$\Rightarrow \quad Z(Y) : \mathcal{H}(X_{in}) \to \mathcal{H}(X_{out})$$

とくに $\partial \Upsilon = \emptyset$ なら

$Z(\Upsilon) \in \mathbb{C}$ ：分配関数と呼ぶ

$Z(\Upsilon)$ は物理では経路積分で得られる。(少なくともこの講義では。)

$$Z(\Upsilon) = \int [D\Psi] e^{S[\Psi]}$$

$S[\Psi]$ ← 作用

$[D\Psi]$ ← フェルミオン場の経路積分

d+1次元 massive fermion

Clifford module S に

追加の要請必要 (理由はあとで フェルミオンのラグランジアン)

$\exists \langle *, * \rangle$: 反対称双線形形式

$s_1, s_2 \in S \Rightarrow \langle s_1, s_2 \rangle \in \mathbb{C}$ s.t.

- $\langle s_1, s_2 \rangle = - \langle s_2, s_1 \rangle$ (反対称)
- $\langle r(h) s_1, r(h) s_2 \rangle = \langle s_1, s_2 \rangle$
  (H_{d+1} 不変)
- $\langle s_1, \gamma_a s_2 \rangle = - \langle \gamma_a s_1, s_2 \rangle = \langle s_2, \gamma_a s_1 \rangle$

ガンマ行列

例　$d+1=3$

$$H_3 = Spin(3) = SU(2)$$

$s \in S$: $SU(2)$ doublet

$\langle s_1, s_2 \rangle = \varepsilon_{\alpha\beta} s_1^\alpha s_2^\beta$

$\alpha, \beta = 1, 2$: $SU(2)$ index

$$(\varepsilon_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

もし S が別の Clifford module T で

$$S = T + T^*$$

双対空間

と書けるなら，常に $\langle *, * \rangle$ は存在

その場合，ディラックフェルミオン

もっと一般の場合はマヨラナフェルミオン

s_1, s_2 が SY (Y: $(d+1)$-dim H多様体) の

切断 $s_1, s_2 \in \Gamma(SY)$ とすると、前の条件から

$$\int_Y \langle s_1, \not{D} s_2 \rangle = -\int_Y \langle s_2, \not{D} s_1 \rangle$$

$\therefore \int_Y \langle *, \not{D} * \rangle$ は反対称双線形

フェルミオン場 ψ の作用を

$$I(\psi) = \frac{1}{2}\int \langle \psi, (\not{D} + m)\psi \rangle$$

質量パラメータ

とする。その意味は、$\partial Y = \emptyset$ のとき

$$"Z_\psi(Y) = \mathrm{Pf}(\not{D} + m)"$$

反対称行列の Pfaffian

$\left(\mathrm{Pf}(\langle *, (\not{D}+m) * \rangle) \text{ の略} \right)$

形式的なPfaffianの問題点；

- 基底ベクトルのチョイスによる

反対称行列 A，任意の B

$$\mathrm{Pf}(B^T A B) = \mathrm{Pf}(A)\,\mathrm{Det}(B)$$

- $\not{D}+m$ は無限次元線形空間 $\Gamma(SY)$ に作用

$\not{D}$ の固有値 λ は $\pm\infty$ まで値をとる

解決方：

$$Z_\psi(Y) = \frac{\mathrm{Pf}(\not{D}+m)}{\mathrm{Pf}(\not{D}+M)}$$

M：定数　（$|M| \to \infty$ の極限をとるが、説明略）

・基底によらない

・$\not{D}$ の固有値 $\lambda \to \pm\infty$ でのふるまいがましになる：$\dfrac{\lambda+m}{\lambda+M} \to 1$

$\not{D}+M$ で割るのは Pauli-Villars 正則化とよばれる。

d次元 chiral fermion

d+1次元と同じ Clifford module S を考える。

$$\overbrace{\underset{\uparrow}{\gamma_0},\ \underbrace{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_d}_{d次元}}^{d+1次元}$$

$\mathbb{Z}_2$ grading

$\bar{\gamma} = \gamma_0$ とおく。 $\bar{\gamma}^2 = 1$

$\mathbb{Z}_2$ graded Clifford module

$$S = S_+ \oplus S_-$$

$$\bar{\gamma} S_\pm = \pm S_\pm$$

$$\gamma_a S_+ = S_- \qquad a = 1, 2, \cdots, d)$$

$$(\because \{\bar{\gamma}, \gamma_a\} = 0)$$

d 次元 chiral fermion 場 ψ を

$\bar{\gamma}\psi = +\psi$ （または $\bar{\gamma}\psi = -\psi$ も可）

$$I(\psi) = \frac{1}{2}\int_X \langle \psi, \not{D}_+ \psi \rangle$$

d 次元 H 多様体

$$D_+ : \Gamma(\underbrace{S_+}_{\bar{\gamma}=+1} X) \longrightarrow \Gamma(\underbrace{S_-}_{\bar{\gamma}=-1} X)$$

この意味は，d 次元 H 多様体 X ($\partial X = \phi$) に対して

"$Z_\psi(X) = \mathrm{Pf}(\not{D}_+)$"

こんどは，Pauli-Villars が使えない

理由：もし $s_1, s_2 \in S_+X$ なら

$$\langle s_1, \bar{\gamma} s_2 \rangle = -\langle \bar{\gamma} s_1, s_2 \rangle$$

$$\begin{array}{ccc} \langle s_1, \bar{\gamma} s_2 \rangle & = & -\langle \bar{\gamma} s_1, s_2 \rangle \\ \parallel & & \parallel \\ \langle s_1, s_2 \rangle & & -\langle s_1, s_2 \rangle \end{array}$$

$\therefore \langle s_1, s_2 \rangle = 0$

一方，$s_2 \in S_+X \Rightarrow \not{D} s_2 \in S_-X$ だから

$\langle s_1, \not{D} s_2 \rangle$ は O.K.

Pfaffian line のがいねんが必要

V : 線形空間

A : 反対称双線形形式

$v_1, v_2 \in V \ni A(v_1, v_2) = -A(v_2, v_1)$

そのとき Pf(A) の自然な定義は?

$$A : V \times V \to \mathbb{C}$$

$$\mathrm{Pf}(A) : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\dim V = 2n} \to \mathbb{C}$$

$$(v_1, v_2, \cdots, v_{2n})$$

$$\to \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma) A(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}) \cdots A(v_{\sigma(2n-1)}, v_{\sigma(2n)})$$

$\mathrm{Det}\, V \equiv \bigwedge^{\dim V} V$ と定義

↑外積

$\mathrm{Pf}\, A \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Det}\, V, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Det}\, V^*$

よって、

$$Z_\psi(X) = \mathrm{Pf}(D_+) \in \underbrace{\mathrm{Det}\, \Gamma(S_+ X)^*}_{\substack{\cong \\ \mathcal{L}_X}}$$

Pfaffian line

$Z_\psi(X)$ は数 $\mathbb{C}$ でなく 1次元線形空間 $\mathcal{L}_X$ の元。 前に述べた公理系を みたさない

line

$$\boxed{\mathcal{L}_X \text{ が「非自明」} \Rightarrow \text{アノマリー}}$$

Xのリーマン計量，接続をうごかす

line $\mathcal{L}_x$ は line bundle $\mathcal{L}$ になる

$$\begin{array}{c} \mathcal{L} \\ \downarrow \\ M \end{array}$$ (計量，接続のパラメータ空間)

geometric family index theorem

$\mathcal{L}$ に自然による接続の

ホロノミー，曲率などを

与える定理

corollary

曲率 $\longrightarrow$ 1st chern class

$c_1(\mathcal{L})|_{\text{deRham}}$

§3 フェルミオンと族の指数定理

主張

$\boxed{\text{geometric family index theorem は (d+1) 次元 massive fermion で理解できる.}}$

d+1 次元 Y

$$Y = \mathbb{R}_{\leq 0} \times X$$

$$\mathbb{R}_{\leq 0} = \{ \tau \in \mathbb{R} \mid \tau \leq 0 \}$$

を考える。いまだけ X は ローレンツ計量

Y上のディラック方程式

$$(\not{D}_Y + m)\Psi = 0 \quad \text{(時間発展)}$$

$$\not{D}_Y = \gamma_0 \frac{\partial}{\partial \tau} + m + \not{D}_X$$

$\tau = 0$ での境界条件として

$$L : (1 - \gamma_0)\Psi|_{\tau=0} = 0$$

$m < 0$ のとき局在化した解

$$\Psi = \psi \exp(-\underset{\sim}{m\tau})$$

$m\tau = |m\tau| \quad (m<0,\ \tau<0)$

$$\gamma_0 \psi = \psi, \qquad \not{D}_X \psi = 0$$

ψ は $\bar{\gamma} = \gamma_0 = +1$ の chiral fermion

Euclid 計量にもどる

$d+1$ 次元 Y $\quad \partial Y = X$

境界条件 L : $(1-\gamma_0)\Psi|_X = 0$

$$Z_\Psi(Y, L) = \frac{Pf(D\!\!\!/+m)}{Pf(D\!\!\!/+M)} \in \mathbb{C}$$

(注：$D\!\!\!/$ は self-adjoint でない)

一方，次の量も考えることができる。

$Z_\Psi(Y) \in \mathcal{H}(X)$ (massive fermion のヒルベルト空間)

$Z_\psi(X) \in \mathcal{L}_X$ (chiral fermion の Pfaffian line) d+1次元 massive fermion Ψ

+ 境界条件 L

→ d次元 chiral fermion ψ

の物理的解釈：

$m \to -\infty$ の極限で

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \mathbb{C}}}{Z_\Psi(Y, L)} = \underset{\substack{\cap\\ \mathcal{H}_0(X)}}{Z_\Psi(Y)}\ \underset{\substack{\cap\\ \mathcal{L}_X}}{Z_\psi(X)}$$

とくに，$\mathcal{H}_0(X) = \mathcal{L}_X^*$

基底系態の張る1次元空間

$|m| \to \infty$ では $\mathcal{H}(X)$ は実質

基底 $|\Omega\rangle$ のみ

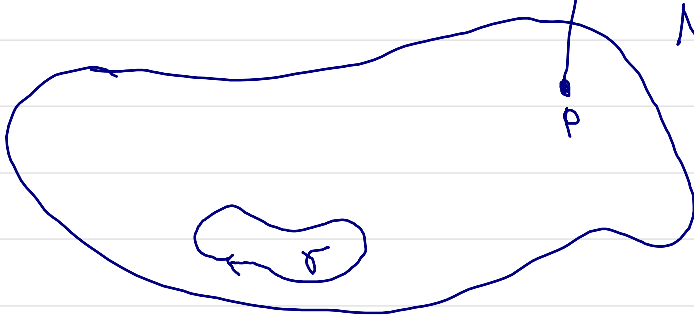
$\mathcal{L}x^* = \mathcal{H}_0(X)$

ベリー位相：$\mathcal{H}_0(X)$バンドル上の接続

$$\begin{array}{ccc} X & \to & F \\ & & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

X_p：pで指定される計量，接続の入ったX

M：X上の計量，接続の空間



$\gamma : S^1 \to M$ ループ

$\gamma^* F$：Fのひきもどし，total space
$\underbrace{d}_{X}+\underbrace{1}_{S^1}$ 次元

γ上のホロノミー

$Z_\Psi(\gamma^* F)$：ベリー位相
(= $|\Omega\rangle$ の位相の変化)

もっと一般の $d+1$ 次元 Y $(\partial Y = \phi)$ で

$Z_\Psi(Y)$ を計算

$$Z_\Psi(Y) = \frac{\mathrm{Pf}(\not{D}+m)}{\mathrm{Pf}(\not{D}+M)} = \sqrt{\frac{\mathrm{Det}(\not{D}+m)}{\mathrm{Det}(\not{D}+M)}}$$

$$= \prod_\lambda \left(\frac{-i\lambda+m}{-i\lambda+M} \right)^{\frac{1}{2}}$$ λ : $i\not{D}$ の固有値

$$\xrightarrow{m=-M,\ M\to\infty} \prod_\lambda \exp\left(-\frac{\pi i}{2}\frac{\lambda}{|\lambda|}\right)$$

$$= \exp(-\pi i \eta(i\not{D}))$$

$\eta(i\not{D}) = \frac{1}{2}\sum \frac{\lambda}{|\lambda|}$: Atiyah-Patodi-Singer η invariant

$$\therefore \boxed{Z_\Psi(Y) = \exp(-\pi i \eta(i\not{D}))}$$

ホロノミーは $Y = \gamma^* F$ として求まる。

APS index theorem :

Z : $d+2$次元　$\partial Z = Y$

$$\mathrm{Index}(i\not{D}_Z) = \eta(i\not{D}_Y) + \int_Z \underset{\sim}{I_{d+2}}$$

$\hat{A}\,ch$

通常の指数定理にあらわれるもの.

$(d+2)$-form

$\tilde{\gamma} : D^2 \to M$, $\partial D^2 = S^1$上 $\gamma : S^1 \to M$ となるものをとる。

実は偶数

$$\eta(i\not{D}_{\gamma^* F}) = \text{整数} + \int_{\tilde{\gamma}^* F} I_{d+2}$$

$$Z_\psi(\gamma^* F) = \exp\left(\pi i \int_{\tilde{\gamma}^* F} I_{d+2}\right)$$

∴曲率

$$-\pi i \int_X I_{d+2} \qquad (2\text{-form})$$

1st Chern class

$$c_1(\mathcal{L}^*)_{\mathrm{deRham}} = \int_X \underbrace{\frac{1}{2} \tilde{I}_{d+2}}_{\text{アノマリー多項式と呼ばれる}}$$

注　物理では，$Z_\pm(Y)$ を任意の Y （γ^*F だけでない）で考えることが重要となっている。