Flat connection と Yang-Baxter 方程式

河東泰之（東大・理・数学）

§0 Introduction

さきに，“Paragroup 入門” に見たように,（少なくとも finite depth の）subfactor の分類は，flat connection の分類に帰着される．Flatness 以外の connection の条件はグラフの local な条件であるから，チェックするのは一般にそれほど困難ではないが，flatness は，サイズの大きい diagram を扱わなければならないため，多くの困難が生じる．特定の有限グラフ上の特定の connection の flatness を確かめるには，定義そのものからは，無限個の式をチェックする必要があるのだが，Jones projection の flatness より，実は，有限個の式のチェックですむことは容易にわかるので，希望があるように思える．しかしそれでも，サイズが大きい diagram の場合は，式は非常に複雑になって直接のチェックはきわめて困難な場合が多いのである．たとえば，Dynkin digram E_8の場合，すべての式は，具体的に与えられているので，Ocneanu の主張を確認するにはある一つの式を確かめればよいことがわかる．しかし，その式は，$\sin\pi/60$ と $\cos\pi/60$ の平方根が入りまじった数十万の項を持つもので,（少なくとも私には）実際にはコンピュータでの近似計算くらいしかできないのである．そこで，flatness をチェックするためのある程度一般的な方法がないだろうか，ということになる．ここでは，その方法として，Yang-Baxter 方程式と orbifold procedure の二つを解説する．

なお，この内容の大半は，D. Evans との共同研究[EK] に基づく．

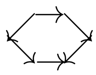
§1 Face operator と Yang-Baxter 方程式

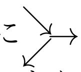
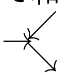
簡単のため，まず Dynkin diagram A_nを考えよう．この時，string algebra は，Jones projection から生成され，また Jones projection は

flat なので，これで全部すんでいるのだが，もう少し一般的に通用する方法に拡張することを考えてみたいわけである.（注：Jones projection の flatness は，Jones projection の定義式の係数と crossing symmetry の係数が同じであることからわかる.）

そこで登場するのが有名な Yang-Baxter 方程式である．作用素環で出てくる connection は，格子模型でいう spectral parameter というものの無い形なので，ここでいう Yang-Baxter 方程式（star-triangle relation ともいう）とは次のものである．

まず以下のような 6 角形を取る．



ここで，各辺は今，考えているグラフから取る．つまり，左上の頂点から右下の頂点に至る長さ 3 の道を 2 通り考えているわけである．この 6 角形の内部の埋め方を次のように 2 通り考える．まず，最初に  のように埋めてみる．内側の 3 つの辺は，グラフから取ったものであり，外側の 6 角形とつながっていなくてはならない．ここで，partition function と同様の操作を行う．つまり，平行四辺形が 3 つ現われるので，それらに対応する connection の値 3 つを掛け，その積を内側の 3 辺のすべての選び方にわたって和を取るのである．これを Yang-Baxter 方程式の左辺とする．同様に  という入れ方を考え，すべての組み合わせにわたって 3 つの connection の積の和を取る．これを右辺とし，それが上で求めた左辺の値と等しい，とおいたのが Yang-Baxter 方程式である．

一方，string algebra double sequence に対し，以下のような face operators が考えられる．

$$F_n = \sum_{\substack{|\xi|=n-1 \\ |\alpha|=|\beta|=|\gamma|=|\delta|=1}} \begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\gamma} & \cdot \\ {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\delta} \\ \cdot & \xrightarrow[\beta]{} & \cdot \end{array} (\xi\cdot\alpha\cdot\beta, \xi\cdot\gamma\cdot\delta).$$

ただし，各 path $\xi, \alpha, \beta, \gamma, \delta$は，水平方向とする．この $F_n \in A_{0,n+1}$を connection を用いて $A_{k,n+1}$に埋め込むわけだが，Yang-Baxter 方程式を用いれば，その表示は，

$$F_n = \sum_{\substack{|\eta|=k \\ |\xi|=n-1 \\ |\alpha|=|\beta|=|\gamma|=|\delta|=1}} \begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\gamma} & \cdot \\ {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\delta} \\ \cdot & \xrightarrow[\beta]{} & \cdot \end{array} (\eta \cdot \xi \cdot \alpha \cdot \beta, \eta \cdot \xi \cdot \gamma \cdot \delta)$$

であることがわかる．（図を書いてみればよくわかる．たとえば[R].）ただし，ここで，ηは，垂直方向，その他の$\xi, \alpha, \beta, \gamma, \delta$は，水平方向の path である．これは，[R] による結果だが，この事は，横方向の face operator は縦方向の string と可換であることを示している．そこでもし，横方向の string algebra が，face operators によって生成されていれば，connection の flatness が証明されたことになるわけである．

そこでもとにもどって Dynkin diagram の A_nについてみると，このときの face operator は，Jones projection と Id の 1 次結合であることがわかるので，この生成条件は O.K. である．このときの connection は，次の式で与えており，Yang-Baxter 方程式は Andrews-Baxter-Forrester の Yang-Baxter 方程式解の適当な極限として確認できる．（直接チェックすることもできるであろう.）

$$\begin{array}{ccc} i & \longrightarrow & l \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ k & \longrightarrow & j \end{array} = \delta_{kl}\varepsilon + \sqrt{\frac{\mu(k)\mu(l)}{\mu(i)\mu(j)}}\delta_{ij}\bar{\varepsilon},$$

ここで$\varepsilon = \sqrt{-1}\exp\dfrac{\pi\sqrt{-1}}{2N}$であり，$N$は Coxeter 数 $n+1$ である．したがって，この方法によっても A_nの flatness が確認できた．

さて，この方法をもっと一般的なグラフに適用することを考えよう．作用素環のほうでは，これは，Jones の構成の一般化としての Wenzl の

仕事，[W] に対応し，可解格子模型では，神保，三輪，尾角らの仕事，[JMO] に対応する．すなわち，A 型の Hecke algebra に関連した構成である．これを，ここでの string algebra としての見方で考えると以下のようになる．まずグラフの頂点の集合を

$$P_{++}^{(n)} = \{\lambda = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \Lambda_i \mid \lambda_i \geq 1, \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \leq n-1\}$$

で定める．これは Kac-Moody algebra $A_{N-1}^{(1)} = \widehat{SU(N)}$ のレベル $N-n$ の可積分表現の集合で，“Weyl alcove” と呼ばれる．またΛ_iは基本表現の $N-1$ weight である．まず Nを固定し，グラフ $\mathcal{A}^{(n)}$の頂点を上の集合で与え，その辺を次のように定める．ベクトル $e_i, 1 \leq i \leq n,$ を

$$\begin{aligned} e_1 &= \Lambda_1, \\ e_i &= \Lambda_i - \Lambda_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, N-1, \\ e_N &= -\Lambda_{N-1}. \end{aligned}$$

で定め，グラフの incidence matrix を $A_{\lambda,\mu} = \sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda+e_i,\mu}$とおくのである．$N = 3, n = 6$ の場合の例をあげよう．グラフは，Dynkin 図形のときと異なり，oriented であることに注意する．

（これらに関しては，[DZ] にわかりやすく書いてある.）さて，次に connection を定める必要がある．これは，次の式で与えられる．まずグ

ラフの頂点間の内積を $e_j \cdot e_k = \delta_{j,k} - \dfrac{1}{N}$, で定め，関数 s_{jl} を各頂点λに対し，$s_{jl}(\lambda) = \sin(\dfrac{\pi}{n}(e_j - e_l) \cdot \lambda)$ と定義する．この時，connection W は，

$$\begin{array}{ccc} \lambda & \longrightarrow & \lambda + e_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lambda + e_j & \longrightarrow & \lambda + e_j + e_l \end{array} = \delta_{jk}\varepsilon + (1 - \delta_{jl})\bar{\varepsilon}\sqrt{\frac{s_{jl}(\lambda + e_j)s_{jl}(\lambda + e_k)}{s_{jl}(\lambda)^2}}$$

と決める．ここでεは，$\varepsilon = \sqrt{-1}\exp\dfrac{\pi\sqrt{-1}}{2n}$ とおいた．左辺が admissible square になるには $k = j$ または $k = l$ でなくてはならないことに注意しよう．この connection の unitarity は，直接チェックできる．それは，この式が，Hecke algebra の generator と Id の 1 次結合だからである．また，face operators が，string algebra 全体を生成することも，algebra が，Hecke algebra として表されていることからわかる．

この connection が，Yang-Baxter 方程式を満たすことは次のようにしてわかる．まず，[JMO] の Yang-Baxter 方程式解に入っている parameter p を 0 にする．これによって楕円関数は単なる三角関数になる．残りは parameter u の式だが，$x = \exp(i\pi u)$ とおくと，式はすべて x の Laurent 多項式になっているので，その最高次の係数をとれば parameter 無しの Yang-Baxter 方程式解を得る．これに適当な定数を掛けたものが上の connection である.（実際は，一か所で符号の違いが現われるが，それは問題無いことが，すぐに確かめられる.）

そこで，この connection を用いて，また string algebra double sequence を作るのだが，今度は，グラフが oriented であるために，縦方向に Jones projection を作ることができず，縦に Jones tower が並ぶことが証明できない．これでは，困るので，縦方向にむりやり Jones projection を作ることにする．それには，縦方向の 1 回目には，もとのグラフを使い，２回目には，向きをひっくり返したグラフを使い，３回目に

は，またもとのを使い，$\cdots$，と繰り返せばよい．すると，2行目と3行目との間で使いたい connection が，定義されていないが，それは，1行目と2行目で commuting square ができていることより，second inversion relations が成りたっているので，新しくその式を用いて定義してやれば，unitary connection がうまく作れる.（つまり，本来成立しているべき crossing symmetry の式を “定義” だと思うのである.）これによって，縦に Jones tower を並べることができる．次に relative commutants の tower を調べたい．それには，再び，縦の string と横の string が可換であることを示せば十分である．それは，横方向の string algebra は，periodic な commuting square なので，Wenzl の次元評価式が使えるからである.（この時，縦方向の string algebra が，relative commutants の tower になる.）上のような向きを引っくりかえす操作をしても，Yang-Baxter 方程式はくずれないことがわかるので，上と同様の理由によって，relative commutants の tower および principal graph が計算できる．さらに，canonical commuting square も求まる．$N=3$ の場合の principal graph の例をすこしあげよう．

§2 Orbifold subfactors

次に，§1 での構成に対し，orbifold procedure を適用しよう．Orbifold の考えは，格子模型では，[Ko, FG] 等によって，導入された．作用素環とグラフに関しては，[C] も関連したことを扱っている．Orbifold は，作用素環的に言えば，次のようになる: グラフと connection がある対称性を持つとき，その対称性で “割る” ことによって新しい string algebra から新しい subfactor が構成できる．これが，多様体を有限群作用で割る操作に似ているので，orbifold という用語を流用するのである.（Paragroup は，多様体もどきでもあったことを思い起こそう.）

まず，§1 での string algebra は，グラフの “端点” を出発点$*$に取っていることに注意しよう．ところが，グラフのサイズを表す n が，N の倍数であれば，グラフは，N個の対称な端点を持っており，グラフと connection は，各端点をまわす “回転” について不変である．そこでまず，N個の出発点から発する string algebra を考えるのである.（すなわち，Bratteli diagram の第一列が $\mathbf{C}^N$になっている，ということ.）この string algebra 自身に，回転は，$*$-algebra isomorphism として働く．だから，string algebra double sequence で，回転での fixed point algebra を考えることにより，新しい string algebra double sequence が得られる．ここで，double sequence は，connection によって，同一視されているから，その同一視をこめてちゃんと fixed point algebra が取れることを見なければならないが，それは，connection の回転不変性から従う．

具体的に，もとのグラフが A_n型の Dynkin 図形だとしよう．すると orbifold string algebra のグラフは，n が奇数のとき，$D_{(n+3)/2}$であることがわかる．グラフ A_nの中点が回転の不動点であり，この頂点が，２つに分かれ，その他の点は，半分につぶれた結果，D型の Dynkin 図形になるのである．

一般にこのような操作を行うと，新しい double sequence から得られる subfactor は，もとの subfactor と同じ index を持つ．そのため，区別には，commuting square（または，少なくとも principal graph）を計算

しなくてはならないが，これには，flatness がないと困難である．ところが，orbifold construction では，もとの flatness は，保存されない．新しい orbifold の方の flatness は，だいたいうまくいっているのだが，回転の不動点のまわりで，微妙なことが生じ，一般には，flatness に対する obstruction がここで発生するのである．そこで，この obstruction が，いつ消滅するかを決定することが重要になる．

この obstruction について詳しく調べてみると，結局，ある大きい diagram の partition function を計算することに帰着することがわかる．その値が 1 に等しいことと flatness が同値である．（この計算は，縦横の string の可換性が適当な partition function の値が 1 に等しいことと同値になるのと同様の論法である．このかたちの条件が flatness という名前の由来である．）そこで，その partition function の値を計算しようとするわけである．これは，a priori には，ただの複素数であるが，Yang-Baxter 方程式や，Jones projection の性質を用いた計算により，絶対値が 1 であることがまずわかる．さらに，connection の形を詳しく見て gauge choice にあたる操作を行うと，その値は，実数であることも帰納法で示せる．だから，±1 となるわけである．さらに，符号を決定しなくてはならないが，これには，combinatorial な技巧を用いた induction が必要である．

その結果，$N = 2$ では，obstruction として，±1 が交互に現われることがわかる．（$N = 2$ の時は，グラフが “1 次元的” であるため，ほかの場合より，ずっと議論が楽である．）これによって，Dynkin 図形 D_n は，D_{2n}だけが，principal graph として，（unique に）現われ，D_{2n+1}は，principal graph として実現できないことがわかる．このことは，Ocneanu によって，[O1] 以来繰り返しアナウンスされてきたが，この方法によって初めて証明されたものである．（[Ka]）（D_{2n+1}の不可能性については，[I1] で独立に，より簡単な証明が与えられている．）そして，$N = 3$ の場合は，この obstruction は，消滅することも示せる．この証明では，3 が奇数である，ということが本質的にきいてくる．（5 以上の奇数のときも本質的には同じはずだが，グラフの性質が一部テクニカルなところに

きいてくるため，今のところちゃんとできていない.）$N = 3$ のときの orbifold subfactor の principal graph をいくつか書いてみると，以下のようになる.

また，extended Dynkin diagram $D_n^{(1)}$ にも，$A_{2n+5}^{(1)}$ からの orbifold construction を適用することができる．この時は，$A_{2n+5}^{(1)}$ の出発点$*$が，symmetry で不変なため，flatness に対する obstruction は発生しない．これによって，principal graph $D_n^{(1)}$ を持つ subfactor（index は 4 ）の数は，$n - 2$ であることが証明できる.（[IK]）この数字は，Popa の分類リスト [P2] で，抜けていた最後の数字である.（Popa は，ある cohomology 群の元を用いた形で分類を与えた.）また，Ocneanu が ICM-90 で示した分類リストは，この点で誤っている.

参考文献

（ここに無いものは，“Paragroup 入門” の参考文献リストを見よ.）

[C] M. Choda, *Duality for finite bipartite graphs*, preprint.

[DZ] P. Di Francesco & J.-B. Zuber, *$SU(N)$ lattice integrable models associated with graphs*, Nucl. Phys. **B338** (1990), 602–646.

[EK] David E. Evans & Y. Kawahigashi, in preparation.

[FG] P. Fendley & P. Ginsparg, *Non-critical orbifolds*, Nucl. Phys. **B324** (1989), 549–580.

[JMO] M. Jimbo, T, Miwa, & M. Okado, *Solvable lattice models related to the vector representation of classical simple Lie algebras*, Comm. Math. Phys. **116** (1988), 507–525.

[Ko] I. Kostov, *Free field presentation of the A_n coset models on the torus*, Nucl. Phys. **B300** (1988), 559–587.

[R] Ph. Roche, *Ocneanu cell calculus and integrable lattice models*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 395–424.

[W] H. Wenzl, *Hecke algebras of type A and subfactors*, Invent. Math. **92** (1988), 345–383.