作用素環と量子Galois群

河 東　泰 之

1. はじめに

結び目の不変量，Jones多項式が作用素環論に基づいて発見されたのは1984年の5月のことであった．ちょうどその年の4月に4年生のセミナーで作用素環論を勉強し始めたばかりだった私にとって，それ以来進行しているこの10年あまりの理論の深まりは実に刺激的なものであった．それは，これまで作用素環論とはあまり関係がないと思われていた数学，理論物理学の多くの分野が新たに作用素環論との結びつきを深めていく様子を目の当たりにすることができたからである．作用素環論の立場から見た場合，これらほかの分野（量子群，3次元トポロジー，共形場理論，可解格子模型，...）との間をつなぐ理論は「量子化されたGalois理論」にあたるもので，paragroup理論と呼ばれている．以下，この理論について解説することがこの文章の目的である．

通常のGalois理論では，体K（たとえば有理数体）とその拡大体Lの組を考える．そしてテクニカルな条件を飛ばして簡単に言えば，この組のGalois群とは，大きい体Lの自己同型のうち小さい体Kの元を動かさないようなもの全体のなす群である．これに対し作用素環論では，体を環に取り替えて作用素環Nとその拡大環Mの組を考える．ここで作用素環と言っているのは，Hilbert空間上の連続線形作用素（荒っぽく言えば無限次元行列のこと）のなす環のことで，さらに通常，代数的，解析的に都合のいい条件を仮定するため，II_1 factor（ツーワンファクター）と呼ばれるクラスの場合を主に考える．このクラスはMurrayとvon Neumannが約60年前に導入したものであり，II_1というのはその時の分類の番号，factorというのは分類理論における基本的な単位ということからついた名前である．さらに作用素環論では，環Nとその拡大環Mの組と考えるかわりに，環Mとその部分環Nの組と考えたほうがいろいろと都合がいいので，II_1 factor Mの中にII_1 subfactor Nが入っていると思うことにする．このような設定のもとでの研究を組織的に始めたのはJones[2]で，1980年代の初めのことである．このJonesの理論はしばしば，II_1という分類番号も取ってしまって簡単にsubfactor理論と呼ばれる．

このsubfactor理論においてGalois群に類似の役割を果たすものが，paragroupである．ここで“para”というのは「$\cdots$もどき」を表す接頭語であり，何らかの意味で群の概念を一般化（あるいは「量子化」）していることを意味している．（ここで断わっておくと，今考えている「量子化」は量子群とは異なったものである．荒っぽく言えば通常の量子群はLie群の量子化に当たり，paragroupは有限群の量子化に当たる．有限群や，$q=\exp(2\pi i/k)$における量子群はparagroupの例になる．）

Paragroupの理論は，1987年Ocneanu[3]によって導入された．（この人はルーマニアからの亡命者で現在の国籍はアメリカである．彼の名前はしば

しば英語式にオクニアーヌと発音されるが，語学の達人であり日本語も使いこなす本人は，自分の名前をカタカナでオクネアヌと書いている.）最初にこの理論が大々的に宣言されたのは，1987 年のイギリス・ダラムでのコンファレンスだった．私はそれを聞いていてあまりの衝撃に呆然としたことをよく覚えている．そこで多くの数学者がこの理論に興奮してぜひ理解したいと思ったのだが，彼はちっとも証明を書かず，皆がいらいらし始めていた．彼は作用素環論で史上最高クラスの独創性と洞察力を備えた天才的数学者だが，定義，定理，証明，と続く普通の論文はまるで書かないことでも有名な人なのである．そういう状態が続いていた 1990 年，彼は京都の ICM で招待講演を行うため日本へやって来て，そのついでということで東大で 3 日間の連続講演をしてもらい，私が記録[4)]を取ることになった．この講義こそ，私がこれまでの研究生活で聞いた中でもっともすばらしいものであり，私は聞きながらとても感動していた．しかし，一ヶ所重要な核心部分がどうしてもわからなかった．これは実は有名なポイントであり，この直前に Ocneanu と入れ違うように東大を訪れていた Jones も，自分の出発前にぜひ Ocneanu に会わせろと言って会い，すぐこの点について質問していたのだった．私は横で聞いていたが，Ocneanu はものすごい早口でまくしたて，Jones はもっともらしくうなずいている．こんなめちゃくちゃな説明でわかるとはさすがは Fields 賞だ，と思って感心して見ていたのだが，Ocneanu が席をはずしたとたん，Jones は私の方を見て「おまえ，今のでわかったか．俺は何にもわからなかった.」と言ったのだった．そのこともあって Ocneanu にはこの点についてしつこく質問したのだが，言を左右にしてなかなかまともに説明しようとしない．それが，本郷三丁目の中華料理屋で昼食中に，昔数学オリンピックに出たときの自慢話をしていたかと思うと突然,「さっきの証明はこうだ」と言って，店の紙ナプキンに小さな図を描いたのだった．この瞬間に私はすべてを理解した．そしてこの時から，私の paragroup 理論とその応用の研究が始まったのである．

その後も Ocneanu は 3 次元トポロジーや共形場理論などとの関連を深め続け，paragroup 理論は大きく成長して来た．彼と会って話すたび，新たな応用や拡張を説明して来るパワーは驚くばかりである．しかし相変わらず彼は普通の論文を書かないため，paragroup 理論は作用素環論専門家の間でさえ，誰もが認める重要性にもかかわらず，近寄りがたい難解なものというレッテルを貼られてしまっており，いつの間にか Ocneanu の講演を聞いて中身がわかるのは私だけだということになってしまった．実際，これまで paragroup 理論とその応用で普通の論文を書いているのは私と，私から習った人だけであり，少数にとどまっているのだが，本来 paragroup 理論は純代数的に考えれば何も難しいものではなく，また，その重要性においても少なくとも量子群の理論に匹敵するものと私は考えている．だから，このあまり望ましいとは言えない現状を改善するよう，ここで多くの人が paragroup 理論の一部にでもふれてもらえれば，と考えている．

2. II_1 factor

Paragroup 理論に入る前に，どのような作用素環を考えているのかについて，簡単に触れておきたい．というのも，subfactor/paragroup 理論に興味を持つ他分野の研究者はかなりいるようなのだが，作用素環の一般論を知らないため最初のところでわからなくなるという話をよく聞くからである．たしかに作用素環論の一般論は分厚い教科書がいくつも出ており学ぶのはそう簡単ではないが，実際は，ここで考えている subfactor/paragroup 理論に関して必要な部分はごくわずかしかないのである．

上で述べたように，中心となる作用素環は II_1 factor と言われるものである．これは作用素環のうち，von Neumann 環と呼ばれるもののさらに一部だが，ここで一般的定義を書いてもあまり仕方がないので作り方の例を挙げよう．

まず 2 次元複素行列のなす環 $M_2(\mathbf{C})$ を次のように，4 次元複素行列環 $M_4(\mathbf{C})$ に埋め込もう．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

これによって，$M_2(\mathbf{C}) \subset M_4(\mathbf{C})$ と思うことができる．同様にして，

$$M_2(\mathbf{C}) \subset M_4(\mathbf{C}) \subset M_8(\mathbf{C}) \subset \cdots$$

と思って，増大和 $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{2^n}(\mathbf{C})$ を取り,「しかるべき位相」（後述）で閉包を取れば，無限次元行列環としてふさわしいものができる．これが II_1 factor の重要な例になっている．少し注意しておくと，普通に考えると，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

として，

$$M_2(\mathbf{C}) \subset M_3(\mathbf{C}) \subset M_4(\mathbf{C}) \subset \cdots$$

という増大列を考えたくなるだろうが，こうやって増大和を取って今の位相で閉包を取ると，可分 Hilbert 空間上の連続線形作用素が全部出てしまい，それは作用素環としてはつまらないものになってしまうのである．

次にもう一つ作り方の例を挙げよう．n 次対称群 S_n は，自然に $n+1$ 次対称群 S_{n+1} の部分群と思える．(すなわち，S_{n+1} を $n+1$ 個のものの置換全体と考え，そのうち $n+1$ 番目のものを動かさないもの全体を S_n を思えばよい.）次に各 S_n の複素係数の群環 $\mathbf{C}[S_n]$ を考えよう．この環は，S_n の元の形式的 1 次結合 $\sum_{g \in S_n} c_g g$ $(c_g \in \mathbf{C})$ の全体であり，群の掛け算を線形に延長したものが環の掛け算になっている．自然に $\mathbf{C}[S_n] \subset \mathbf{C}[S_{n+1}]$ と思えるから，増大和 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{C}[S_n]$ を取って，再びしかるべき位相で閉包を取れば，できる環が実は II_1 factor の例になっている．有限の n に対しては $\mathbf{C}[S_n]$ は多くのイデアルを持ち，単純環では全然ないが，無限和と閉包を取ったものは実は単純環になっていることが重要であり，この単純性は II_1 factor の一般的定義の一部である．さらに実は，ちっとも明らかなことではないが，今作った II_1 factor と上で作った II_1 factor は同型になることがわかるのである．これらは，有限次元環の増大列で近似できているので，無限次元とは言ってもその中では一番有限次元に近いものである．この「有限次元に近い」という性質は hyperfinite と呼ばれる．量子群や 3 次元トポロジーとの関連を考える際，一番重要な作用素環は今作った，hyperfinite II_1 factor である．Paragroup 理論における重要な現象はしばしば，増大和や閉包を取る前の有限次元環のレベルですでに見られるのだが，理論的立場からは無限次元の環に移行しておくことによってかえって，状況が簡単になることがしばしば起こるのである．

このセクションの最後に，上で述べた「しかるべき位相」についても少し例で説明しておく．そもそも閉包を取るにはある位相空間に入っていなくてはならないが，それには，ある Hilbert 空間上に環を作用させて，その Hilbert 空間上のすべての連続線形作用素のなす位相空間を考えればよい．その位相としてどのようなものを考えるかが問題である．そこで例として，まず自然数 n に対し，図 1 のような，区間 $[-1, 1]$ 上の関数 $f_n(x)$ を考え，また，$[-1, 0)$ 上で -1, 点 0 で 0,（$(0, 1]$ 上で 1 という値を持つ関数 $f(x)$ を考える．すると L^2 の意味では $f_n \to f$ だが，この収束は一様収束ではない．この関数の収束は，実は次のような作用素の収束をもたらすことがわかる．まず，これらの関数 f_n, f から，$g \in L^2(-1, 1)$ に $f_n g, fg \in L^2(-1, 1)$ を対応させる作用素 T_n, T を作ることができる．この時，T_n は T に「作用素の強収束」と呼ばれる位相で収束しているが,「ノルム位相」と呼ばれる (より強い) 位相では収束していない.（弱い方の位相に「強」収束という名前がついているのはおかしく見えるかもしれないが，もっと弱いものがほかにあって，それよりは強いのでこの名前がつい

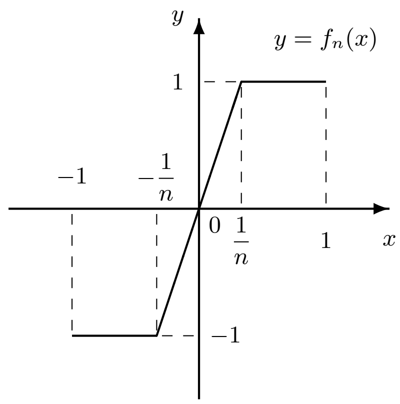

図 1　関数 $f_n(x)$ のグラフ

ているのである.）上で考えていた「しかるべき位相」は，この「作用素の強収束」のことである．つまり荒っぽく言って，上の $f_n \to f$ となる程度の収束を考えているということである．このような位相で閉包を取ることが，II_1 factor の構成のポイントである．

3. 普通の Galois 群から量子 Galois 群へ

次にいよいよ量子 Galois 群としての paragroup を考えたいので，II_1 factor と subfactor の組，$N \subset M$ から出発しよう．まず，体の場合の拡大次数の類似として，$[M : N]$ という実数が現われる．これ自体は Jones 以前からある考え方だが，Jones が組織的な研究を始めたので Jones index と呼ばれる．この記号や "index" という名前は，群 G が部分群 H を含んでいる際の index $[G : H]$ から来ている．概念的な話に関しては，群と部分群でも，体と部分体でもたいした違いはないので，その場に応じた都合のよいアナロジーを使えばよいのである．ただここで重要なポイントは，体の拡大次数や部分群の index は自然数だが，Jones index は，実数値を取るということである．これが無限次元に移行した事の効果である．無限次元環 M の中に無限次元環 N が入っているので，その「サイズの比」としての Jones index は，自然数でない実数値も取るのである．Jones index が無限大であるような状況はごく簡単に実現できるが，そのような場合のことはほとんど何もわかっていないので，通常 Jones index が有限のときに限って話を進めることにしている．ここでもそのようにしよう．

この状況で，一番素朴な Galois 群のマネは，大きな環 M の自己同型で，小さい環 N の元を動かさないもの全体を考えることである．これなら確かに群が出て来る．しかしこのような考え方は昔から,「作用素環の Galois 理論」として知られており，今では古典論に属し，現代的な立場から特に面白いということはない．そして最近量子群や 3 次元トポロジーに関係して現われる subfactor の場合，こうして出てくる群はたいていの場合単位元だけからなる群 $\{1\}$ になってしまい，面白くないのである．

そこで「正しい」ものの見方に到達するためには，少し視点を変えなくてはならない．しばらく作用素環や量子化を忘れ，普通の群の話をしよう．

今の立場から重要なことは，群の代わりにその既約表現全体を考えることである．有限群 G を考え，その既約表現 π, σ を取ろう．すると，そのテンソル積表現 $\pi \otimes \sigma$ を作ることができる.（この表現の次元はもとの表現二つの次元の積である.）これは一般にもはや既約ではないので，それを既約表現の直和に分解することができる．これを，

$$\pi \otimes \sigma = \oplus_j n_j \rho_j \tag{1}$$

と書こう．ここで，ρ_j は G の既約表現，自然数 n_j は分解の際の多重度である．G は有限だから，その既約表現（の同値類）は有限個しかなく，それらの形式的 1 次結合に (1) を線形に延長して定まる積を入れれば有限次元の環が得られる．これが群 G の表現環である．この環だけを抽象的に考えたのでは少し情報が足りないが，もう少し細かいデータを加えてやれば表現環からもとの群 G が復元できるので，このような既約表現全体を考えることは群を考えることと同等と言ってよい．

次に compact 群の例も挙げよう．$SU(2)$，すなわち 2×2 のユニタリ行列で行列式が 1 であるも

の全体を考えよう．これはもともと 2 次元の行列の集合だから，明らかに $\mathbf{C}^2$ に作用している．この 2 次元表現を ρ と書こう．$\rho\otimes\rho$ は，4 次元表現だが，これは実は 1 次元既約表現 ρ_1 と 3 次元既約表現 ρ_3 の直和に分解する．次に $\rho_3\otimes\rho$ を作ると，これは 6 次元表現で，それは 2 次元既約表現 $\rho_2=\rho$ と 4 次元既約表現 ρ_4 の直和に分解する．同様にして，$\rho_n\otimes\rho$ から，ρ_{n-1} と ρ_{n+1} が出て来るので，既約表現の列 $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\ldots$ ができる．これらは（無限次元の）表現環を作り，これらから $SU(2)$ が復元できる．

ここで subfactor の状況 $N\subset M$ に戻ろう．やりたいことは上のような表現環の作り方のマネである．素朴に考えれば，群の表現の類似物は（作用素）環の表現であろう．今，無限次元の作用素環 (II_1 factor) を考えているのだから，その（無限次元）Hilbert 空間への表現を考えることができる．しかし，これでは既約表現の類似がうまく作れないのである．正しいマネの仕方に最初に気付いたのは，作用素環論最初の Fields 賞受賞者 Connes であった．1980 年頃のことである．それには，Hilbert 空間に一つの作用素環が作用している状況ではなく，二つの作用素環が左右から作用している状況を考えることがポイントになる．この，左右からの作用つきの Hilbert 空間は，Hilbert bimodule，略して単に bimodule と呼ばれる．そして，bimodule のテンソル積，既約分解などがきちんと定義できることを Connes は示した．（テンソル積の定義はかなり技巧的なものである.）表現の次元に対応する量もちゃんとあるが，それはもはや自然数ではなく実数値を取る．（これは量子群の理論における量子次元に相当するものである.）この bimodule を群の表現の量子化と思ういろいろとご利益があるのである．

今 $N\subset M$ となっているので，大きな環 M には，左から M，右から N が掛け算で作用している．（もちろん，右からだって M が作用しているのだが，わざと右作用を N に制限したのである.）作用される対象である M は Hilbert 空間ではないが，標準的な内積を入れて完備化することによって M から Hilbert 空間を作ることができるので，本質的には，この M は上の意味での bimodule と思ってよい．これを上の例での $SU(2)$ の 2 次元表現のように思って，「テンソル積 $\longrightarrow$ 既約分解」という操作を繰り返す．そしてこの分解に現われる既約な bimodule 全体を考えるのである．これによって，「量子化された表現環」とでも言うべきものが得られるが，これには fusion rule algebra という名前がついている．二つのものの（テンソル）積がほかのものの和に分解することを fusion と呼ぶことから来た名前である．ここで，一般には上の $SU(2)$ の表現のように，「テンソル積 $\longrightarrow$ 既約分解」という操作を繰り返すと次々新たな既約 bimodule が増えていき，無限にできてしまうものだが，たまたま有限個の bimodule しか生じないことがある．これが，既約表現を有限個しか持たない有限群に類似の状況なので，以下そのような場合だけを考える．（ここで繰り返しておくが，次元にあたる量はもはや一般に自然数ではなく，正の実数になっていることが重要である.）このやり方ではあまり Galois 群の類似のように見えないだろうが，これでちゃんと，このセクションの最初に述べた古典的な作用素環の Galois 理論の一般化になっていることが証明できるのである．

上で有限群の表現環を考えたときに，もとの群 G を復元するためにはもう少しデータがいると言った．ここでも同様に，fusion rule algebra にもう少し詳しい情報を加えないとデータとして不十分である．そのデータとは，表現論で $6j$-symbol と呼ばれているものにあたる．$6j$-symbol の定義はちゃんと書くとごちゃごちゃしてめんどうなので書かないが，群の既約表現の場合は，$(\pi\otimes\sigma)\otimes\rho$ と $\pi\otimes(\sigma\otimes\rho)$ の同値性を記述する，有限次元空間上の双線形形式である．基底を決めてしまえばそれは行列で書けるので，その成分をデータだと思えば有限個の数の組が $6j$-symbol だと言ってもよい．上の fusion rule algebra の状況でこの $6j$-symbol を形式的にマネすることができ，そうして得られるものを quantum $6j$-symbol という．この fusion rule algebra と，quantum $6j$-symbol

が paragroup のデータである．そして，これらはもともと表現のテンソル積に類似した状況から生じたものなので，テンソル積の結合法則などから従うある種の条件を満たしている．それを抽象的に公理化して次のように paragroup の定義を与えることができる．

すなわち，paragroup とは，有限次元の fusion rule algebra（抽象的にはある種の環）と quantum $6j$-symbol と言われるデータ（抽象的には有限個の数の組）からなり，結合法則などに当たる公理を満たしているものである．この公理は実際には 3 つの条件からなり，それぞれ，unitarity, tetrahedral symmetry, pentagon relation と呼ばれるが，式をちゃんと書くと長いのでここでは書かない．有限群は確かにこの意味での paragroup の例になっていることは簡単にわかる．だいたい，これまでの流れからわかるように，paragroup は，有限群（あるいはその表現環）を一般化（あるいは量子化）したものになっているわけである．(本当はさらに，fusion rule algebra の grading の問題があるのだが，簡単のため少しごまかした.)

ここで少し注意すると，群の場合は非常に一般的な定義があり，その特別な場合として有限群があるのだから，本来は一般的な paragroup の定義があって，その特別な場合として有限 paragroup が定義されるべきであろうが，今のところ理論はそういうふうにはできていない．黙って paragroup と言えば，本来有限 paragroup と言われるべき，上のもののことを指すというのが，現状である．少しがんばれば，可算 paragroup とでも言うべきものは定義できなくはないが，そういうものですらあまりよくはわかっていない．

このセクションの最後に Galois の逆問題の paragroup 版について述べておこう．Galois 理論の場合は，抽象的に定義された群の公理を満たすものとして有限群があるわけだが，任意の有限群が実際に有理数体上の Galois 群として実現できるか，という問題がある．これは Galois の逆問題と呼ばれ，現在でも未解決である．Paragroup に対しても同様に，抽象的な公理を満たす，任意の paragroup が実際に II_1 factor の subfactor から生じるか，という問題が考えられる．しかしこの解答は簡単で，yes であること，しかも II_1 factor は上で作った hyperfinite なものに限ってもよいことがそれほどの苦労なく証明できる．これも無限次元に移行したために状況がかえって簡単になっている事の一つの現われである．

4. 量子群，トポロジー，数理物理学との関係

次に，paragroup 理論がどのように量子群，3 次元トポロジー，共形場理論，可解格子模型などと関係しているかについて説明しよう．

まず量子群であるが，これは代数系であるから，代数系としての paragroup との関係が真っ先に問題になる．関係を一言で言えば，重要な共通部分があるが，どちらかが他方の一部であるわけではない，と言うことである．また共通する場合も，片方の公理系から他方の公理系へと移るのはあまり簡単ではない．(量子群の定義には統一されたものがないが，この点については何を量子群の定義と思っても同様である.）量子群の理論で deformation parameter q が 1 の巾根である場合がよく話題になるが，この種の量子群を paragroup と見なすためには，fusion rule algebra の有限次元性の条件のため，q は 1 の巾根でなくてはならない．さらにそれだけではなく，Hilbert 空間の内積の正値性条件のため，勝手な巾根ではなく，$q = \exp(2\pi i/k)$ という特別な形でなくてはならない．これは，無限次元の関数解析を経由する事から生じる paragroup の制約である．一方，paragroup の方では deformation parameter q などは必要ないし，Hopf 代数よりももっと「変わった」例がいくらでもあると思われる．実際に変な例を作るのは難しいので，具体的に構成されているのは Haagerup の例（1991 年）など少ししかないが，たとえ量子群の定義としてきわめて一般的なものを採用しても，それより “exotic” なものが paragroup にはたくさんあると信じられている．

量子群に関連してもう一つ，Drinfel′d の quantum double と言われる構成についてふれておこう．一つの定義では，量子群とは Hopf 代数である都合のいい条件を満たすものだが，そこでは R 行列と呼ばれるものが重要な役割を果たす．しかし勝手な Hopf 代数を考えたのでは R 行列を持たないので，Hopf 代数を作り替えて R 行列を持つように作り直すことが考えられており，この作り方を quantum double 構成と呼ぶ．作用素環論において，paragroup の quantum double に当たるものを作るのが，Ocneanu の asymptotic inclusion と呼ばれる構成法である．これはある subfactor $N \subset M$ から出発し，新しい subfactor に作り替えるものである．前者と後者の paragroup を比べると，適当な意味で後者が前者の quantum double と呼ぶべきものになっているわけである．これはもともと純解析的な目的のために 1987 年に導入されたものだが，今では作用素環論の代数的側面で大きな注目を集めているものである．

次に 3 次元トポロジーである．Jones 多項式以後，結び目や compact 3 次元多様体の不変量が大量に構成されている．この内，paragroup 理論から見て興味深いものは，多様体の 3 角形分割に基づくものと，結び目の手術（surgery）によって多様体を構成することに基づくものの二つである．前者では，3 次元多様体を 4 面体に分割し，おのおのの 4 面体にある規則で数を割り振り，それを掛けたり足したりして数を出す．その最後の答えが 3 次元多様体の位相不変量になるためには，数を 4 面体に割り振る規則がある条件を満たさなくてはならないのだが，その条件は paragroup の quantum $6j$-symbol の条件とほとんど同じものである．その意味で paragroup の代数的構造は，この種の位相不変量の代数的構造と極めてよく似ている（が，全く同じなわけではない—たとえば内積の正値性や，上で少しごまかした grading の問題がある）．また，後者の surgery に基づくものは，多様体を結び目から作る方法によるものである．任意の 3 次元（compact 境界なし）多様体は結び目から surgery と言われる方法で作れるのだが，違う結び目から同じ多様体が作れることがあるので，ここで多様体の不変量を作るには，結び目の不変量でさらにある追加の条件を満たすものが必要になる．勝手な paragroup からは，そのようなものはすぐには作れないのだが，上で述べた quantum double 構成を使えば，勝手な paragroup からまず quantum double を作ることによって，この様な都合のよい結び目の不変量が作れ，そこからこのような多様体の不変量が作れるのである．

最後に物理との関連を説明しよう．共形場の理論の物理的アイディアを数学的にフォーミュレートする公理系として多くのものが提案されて来ているが，ここで問題にしたいのは，Moore と Seiberg による，組合せ論的な一種の代数系を使うものである．ここでも fusion rule algebra とそれに付随したデータを扱うのだが，物理学者たちが共形場理論で考えるような代数系のデータが一組あれば，そのデータの一部だけを使って，paragroup が作れることがわかっている．一方，任意の paragroup から出発したのでは，Moore や Seiberg の意味でのデータの組は直ちには作れないのだが，上で述べた quantum double を使えば，勝手な paragroup の quantum double から，Moore と Seiberg の意味でのデータが作れるということもわかっている．この意味で，共形場理論で考えられている代数系と paragroup はよく似たものだがいろいろと違いもある．たとえばもっとも明らかな違いは，共形場理論の fusion rule algebra は可換だが，paragroup の fusion rule algebra は可換とは限らないということである．

また，可解格子模型の理論では，通常 4 角形などの図形に数を割り振るが，そのとき spectral parameter と言われるパラメータが重要な役割を果たす．荒っぽく言えば，paragroup は spectral parameter のない可解格子模型によく似ており，可解格子模型，paragroup のそれぞれにおける，例，アイディア，構成法などから他方での類似物に移行することがしばしばできる．しかし，一般論としては，可解格子模型と paragroup はどちらかから他方へ直接移行することはできないという状況になっている．たとえば，Yang-Baxter 方程式

の paragroup 理論での意味の理解はまだ限定的なものにとどまっている．可解格子模型の一般論と paragroup の関係もこれから深めるべきテーマの一つである．

5. 終わりに

最初に述べたように，paragroup 理論は多くの分野と関係した刺激的な理論であり，興味を持つ数学者，物理学者は多いにもかかわらず，実際に自分の研究に paragroup を使っている人の数は圧倒的に少ない．これは，量子群との大きな違いである．そしてその最大の原因は，勉強しようとしてもきちんとわかりやすく書いた文献がないということである．もともと歴史的な理由により，世界の主要大学の数学科で作用素環の講義をしているところは数少ない．このことだけでも理論の普及の妨げであるが，さらに paragroup 理論の論文の引用文献リストを見ると，未出版の博士論文とか，Ocneanu がパリで講演した時の手書き記録だとか，さらにはイスタンブールで講演したときの OHP のシートだとかが並んでいる．私もそういう引用は何度もして来たが，こんなものをどうやって読めというのか，と読者が怒りたくなるのも当然であろう．また，論文 A には論文 B を見よ，と書いてあり，論文 B には論文 A を見よ，と書いてあるような例も一つや二つではない．よく読めばこれらは循環論法にはなってはいないのだが，不親切きわまりないことも確かである．さらに，Ocneanu 本人は例やステートメントを挙げる際によく間違え，条件を言い忘れたり，例になっていないものを挙げたりする，という問題点もある．

しかしこのようなトラブルに阻まれ，この重要な理論があまり普及していないことは，数学の進歩にとって残念なことと言わなければならない．数学者の偉大さを測るのに，その人の考え方が次の世代の数学全体のものの見方にどれだけ強い影響を与えたか，という基準を使うならば，私は Ocneanu こそ作用素環論史上最高の数学者である可能性が一番強いと思っている．(もっとも本人は，自分の paragroup 理論は Galois による群論の創始にも匹敵する大発見であると豪語しているのだが，私はそこまでは主張しない．) そこで私は，paragroup 理論を基礎から明らかにしようと考え，一般論と応用を初歩から展開した本[1)] を Evans と書きあげたばかりである．(この文章中で，「めんどうだから書かない」と言ったことももちろん，ここに全部正確な形が書いてある．) これによって，この理論を取り巻く混乱に終止符を打ちたいと思う．特に，多くの学生の皆さんが，これからこの理論を学んで発展させてくれることを願っている．

参考文献

1) D. E. Evans & Y. Kawahigashi, Quantum symmertries on operator algebras, Oxford University Press, 出版予定.
2) V. F. R. Jones, Index for subfactors, *Invent. Math.* **72** (1983), 1–15.
3) A. Ocneanu, Quantized group, string algebras and Galois theory for algebras, in *Operator algebras and applications*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. **136** (1988), 119–172.
4) A. Ocneanu, Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors, 東大数学教室セミナリーノート 45 (河東記), (1991).

(かわひがし・やすゆき，東大・数理科学)

(かわひがし・やすゆき，東大・数理科学)